Przykładowe zadania z matematyki na poziomie rozszerzonym wraz z rozwiązaniami

Zadanie 1. (0-1)

Funkcja określona wzorem $f(x)=|x-3|-4$ dla wszystkich liczb rzeczywistych

A. nie ma miejsc zerowych.
B. ma dokładnie jedno miejsce zerowe.
C. ma dokładnie dwa miejsca zerowe.
D. ma więcej niż dwa miejsca zerowe.

Rozwiązanie: C

Zadanie 2. (0-3)

Niech $m=\log_{21} 7$. Wykaż, że $\log_7 27=\frac{3(1-m)}{m}$.

Rozwiązanie (I sposób)

Zauważmy, że $\log_7 21=\frac{1}{\log_{21} 7}=\frac{1}{m}$.

Zatem

$$\log_7 27=\log_7 3^3=3\log_7 3=3\log_7\left(\frac{21}{7}\right)=3(\log_7 21-\log_7 7)=3\left(\frac{1}{m}-1\right)=3\cdot\frac{1-m}{m}.$$

To kończy dowód.

Rozwiązanie (II sposób)

Zauważamy, że

$$\frac{3(1-m)}{m}=3\left(\frac{1}{m}-1\right)=3(\log_7 21-1)=3(\log_7 21-\log_7 7)=3\log_7\frac{21}{7}=\log_7 3^3=\log_7 27,$$

co kończy dowód.

Zadanie 3. (0-2)

Oblicz najmniejszą liczbę naturalną n spełniającą nierówność $\left|\frac{2n-10}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{30}$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy nierówność $\left|\frac{2n-10}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{30}$. Przekształcamy ją w sposób równoważny:

$$\left|\frac{3(2n-10)-2(3n+1)}{3(3n+1)}\right|<\frac{1}{30},$$

$$\left|\frac{-32}{3(3n+1)}\right|<\frac{1}{30},$$

$$\frac{32}{3(3n+1)}<\frac{1}{30},$$
$$3n+1>320,$$
$$n>106\frac{1}{3}.$$

W powyższych przekształceniach dwukrotnie skorzystaliśmy z tego, że $3(3n+1)>0$.
Zatem najmniejszą liczbą naturalną spełniającą podaną nierówność jest $n=107$.

Zadanie 4. (0-2)

Równanie $x^2+48x+2=0$ ma dwa rozwiązania x_1, x_2. Liczba $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ jest liczbą całkowitą dodatnią. Znajdź tę liczbę. Zakoduj cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie
Korzystając ze wzorów Viète'a otrzymujemy: $x_1+x_2=-48$ oraz $x_1\cdot x_2=2$.

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2\cdot x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1\cdot x_2)^2}=\frac{(-48)^2-2\cdot 2}{2^2}=575.$$

Należy zakodować cyfry 5, 7, 5.

Zadanie 5. (0-2)

Wielomian $W(x)=x^4+2x^3-5x^2-6px+9$ jest podzielny przez dwumian $x-1$. Oblicz p. Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie
$W(x)$ jest podzielny przez $x-1$, zatem $W(1)=0$. $W(1)=7-6p$. Stąd $p=1{,}166\ldots$.
Należy zakodować cyfry 1, 6, 6.

Uwaga
Należy zakodować cyfry otrzymanego wyniku, a nie wyniku przybliżonego, zatem cyfry 1, 6, 6, a nie 1, 6, 7.

Zadanie 6. (0-3)

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k(k+1)(k+9)(k^2+1)$ jest podzielna przez 5.

Rozwiązanie
Iloczyn jest podzielny przez 5, jeżeli co najmniej jeden z czynników jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k=5l$ (l jest liczbą całkowitą), to pierwszy czynnik jest podzielny przez 5.

Jeżeli $k = 5l + 1$, to czynnik $(k + 9) = 5l + 10 = 5(l + 2)$ jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k = 5l + 2$, to czynnik $(k^2 + 1) = 25l^2 + 20l + 4 + 1 = 5(5l^2 + 4l + 1)$ jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k = 5l + 3$, to czynnik $(k^2 + 1) = 25l^2 + 30l + 9 + 1 = 5(5l^2 + 6 + 2)$ jest podzielny przez 5.
Jeżeli $k = 5l + 4$, to czynnik $(k+1) = 5l + 4 + 1 = 5(l+1)$ jest podzielny przez 5.

Zadanie 7. (0-2)

Udowodnij, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 1$, to $ab \leq \frac{1}{4}$.

Rozwiązanie (I sposób)
Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2},$$

czyli

$$ab \leq \frac{1}{4}.$$

To kończy dowód.

Rozwiązanie (II sposób)
Z założenia mamy $b = 1 - a$. Przekształcamy nierówność $ab \leq \frac{1}{4}$ w sposób równoważny

$$a(1-a) \leq \frac{1}{4},$$

$$a^2 - a + \frac{1}{4} \geq 0,$$

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa. To kończy dowód.

Rozwiązanie (III sposób)
Oznaczmy: $a = \frac{1}{2} + x$, $b = \frac{1}{2} - x$. Wówczas

$$ab = \left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{4} - x^2 \leq \frac{1}{4},$$

co kończy dowód.

Zadanie 8. (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f określona wzorem

$$f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2(1-m)x + 2$$

przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej.

Rozwiązanie

Funkcja $f(x)=\left(m^2-1\right)x^2-2\left(1-m\right)x+2$ w zależności od parametru m jest liniowa lub kwadratowa. Rozważmy dwa przypadki:

1. Gdy $m^2-1=0$, to funkcja f jest liniowa.
   1. Dla $m=-1$ funkcja ma wzór $f(x)=-4x+2$, więc $m=-1$ nie spełnia warunków zadania.
   2. Dla $m=1$ funkcja ma wzór $f(x)=2$, więc $m=1$ spełnia warunki zadania.
2. Gdy $m^2-1\neq 0$, to funkcja f jest kwadratowa. Funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x, gdy parabola będąca jej wykresem leży w całości nad osią Ox. Funkcja $f(x)=\left(m^2-1\right)x^2-2\left(1-m\right)x+2$ ma tę własność, kiedy zachodzą warunki:
   1. $m^2-1>0$,
   2. $\Delta<0$.

   Pierwszy warunek jest spełniony dla $m\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

   Warunek $\Delta<0$ jest spełniony, gdy

$$4\left(1-m\right)^2-8\left(m^2-1\right)<0,$$
$$\left(m-1\right)^2-2\left(m-1\right)\left(m+1\right)<0,$$
$$\left(m-1\right)\left(m-1-2m-2\right)<0,$$
$$\left(m-1\right)\left(-m-3\right)<0,$$
$$-\left(m-1\right)\left(m+3\right)<0,$$
$$m\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left(1,+\infty\right).$$

Zatem funkcja kwadratowa przyjmuje wartości dodatnie dla $m\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

Uwzględniając oba przypadki, otrzymujemy $m\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left\langle 1,+\infty\right)$.

Zadanie 9. (0-1)

Granica $\lim\limits_{x\to -3^-}\frac{-5x}{x+3}$ jest równa

A. $-\infty$
B. 0
C. 6
D. $+\infty$

Rozwiązanie : A

Zadanie 10. (0-2)

Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^3+3n}{\left(1-4n\right)^3}$.

Zakoduj pierwsze trzy cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^3+3n}{(1-4n)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(-2+\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(\dfrac{1}{n}-4\right)^3}=\dfrac{1}{32}=0,03125$.

Ponieważ $\dfrac{1}{32}=0,03125$, więc należy zakodować cyfry: 0, 3, 1.

Zadanie 11. (0-2)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) o wyrazach dodatnich taki, że $a_1=\dfrac{3}{4}$, $a_3=\dfrac{1}{3}$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Pierwszy wyraz i trzeci wyraz tego ciągu są odpowiednio równe: $a_1=\dfrac{3}{4}$, $a_3=\dfrac{1}{3}$.

Ponieważ $a_3=a_1\cdot q^2$, stąd $q^2=\dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{4}{9}$. Zatem $q=-\dfrac{2}{3}$ lub $q=\dfrac{2}{3}$. Wyrazy ciągu są dodatnie, więc $q=\dfrac{2}{3}$. Ponieważ $|q|=\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$, więc

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{1}=\frac{9}{4}.$$

Suma S wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o wyrazach dodatnich jest równa: $S=\dfrac{9}{4}$.

Zadanie 12. (0-2)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\dfrac{2x^4+15}{6-x^2}$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, takich że $x\neq-\sqrt{6}$ i $x\neq\sqrt{6}$. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x=1$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonego wyniku.

Rozwiązanie

Obliczamy pochodną:

$$f'(x)=\frac{\left(2x^4+15\right)'\left(6-x^2\right)-\left(2x^4+15\right)\left(6-x^2\right)'}{\left(6-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{8x^3\left(6-x^2\right)+2x\left(2x^4+15\right)}{\left(6-x^2\right)^2}=\frac{2x\left(-2x^4+24x^2+15\right)}{\left(6-x^2\right)^2},$$

$$f'(1)=\frac{2(-2+24+15)}{(5)^2}=\frac{2\cdot 37}{25}=\frac{74}{25}=2{,}96.$$

Należy zakodować cyfry: 2, 9, 6.

Zadanie 13. (0-3)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=4x^3-2x+1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych. Uzasadnij, że prosta l o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f.

Rozwiązanie
Zapisujemy równanie prostej l w postaci kierunkowej $y=10x+9$.
Wyznaczamy pochodną funkcji f: $f'(x)=12x^2-2$.
Zauważamy, że dla $x=-1$ oraz dla $x=1$ pochodna funkcji f ma wartość 10 i równa się współczynnikowi kierunkowemu prostej l.
Obliczamy wartość funkcji f w punkcie $x=-1$: $f(-1)=-1$ oraz w punkcie $x=1$: $f(1)=3$.
Punkt o współrzędnych $(-1,-1)$ leży na prostej l, natomiast punkt o współrzędnych $(1,3)$ nie leży na tej prostej. Zatem prosta o równaniu $10x-y+9=0$ jest styczna do wykresu funkcji f, co kończy dowód.

Zadanie 14. (0-7)

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i wysokości tego ostrosłupa jest równa 24. Wyznacz promień okręgu opisanego na podstawie tego z ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

Rozwiązanie
Oznaczamy:
A, B, C - wierzchołki podstawy ostrosłupa.
S - wierzchołek ostrosłupa.
O - środek okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

Niech $x=|AO|=|BO|=|CO|$ oznacza promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz $h=|SO|$ oznacza wysokość tego ostrosłupa. Wówczas $x+h=24$.

Wysokość AD w trójkącie ABC jest równa $|AD| = \frac{|AB| \cdot \sqrt{3}}{2}$. Zatem promień x okręgu opisanego na trójkącie ABC (podstawie ostrosłupa) jest równy: $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{|AB|\sqrt{3}}{2} = \frac{|AB|\sqrt{3}}{3}$, stąd $|AB| = x\sqrt{3}$. Wyznaczamy pole podstawy ostrosłupa: $P = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$.

Ponadto z równości $x + h = 24$ otrzymujemy $h = 24 - x$, gdzie $0 < x < 24$.

Zatem objętość tego ostrosłupa jest określona wzorem: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2\sqrt{3}}{4} \cdot (24 - x)$, czyli $V = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-x^3 + 24x^2\right)$.

Należy obliczyć, dla jakiego x spełniającego nierówność $0 < x < 24$ funkcja V określona wzorem $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-x^3 + 24x^2\right)$ przyjmuje wartość największą.

Rozważamy funkcję $f(x) = -x^3 + 24x^2$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji f: $f'(x) = -3x^2 + 48x$.

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1 = 16$, $x_2 = 0$. Ponadto:

- $f'(x) < 0$ w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $(16, +\infty)$,
- $f'(x) > 0$ w przedziale $(0, 16)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0\rangle$ oraz $\langle 16, +\infty)$ i rosnąca w przedziale $\langle 0, 16\rangle$.

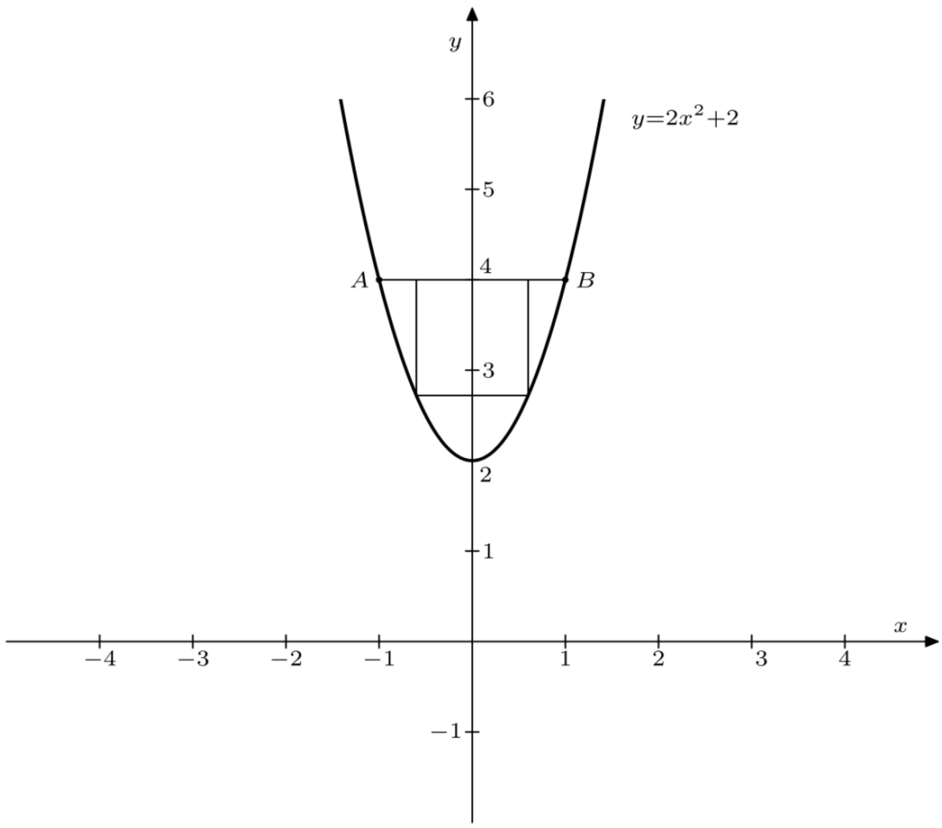
Ponieważ $V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} f(x)$ dla $x \in (0, 24)$, więc w przedziale $x \in (0, 24)$ funkcja $V(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x = 16$ funkcja V przyjmuje wartość największą.

Objętość ostrosłupa jest równa: $V = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-16^3 + 24 \cdot 16^2\right) = 512\sqrt{3}$.

Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest największa i równa $V = 512\sqrt{3}$, gdy promień okręgu opisanego na podstawie jest równy 16.

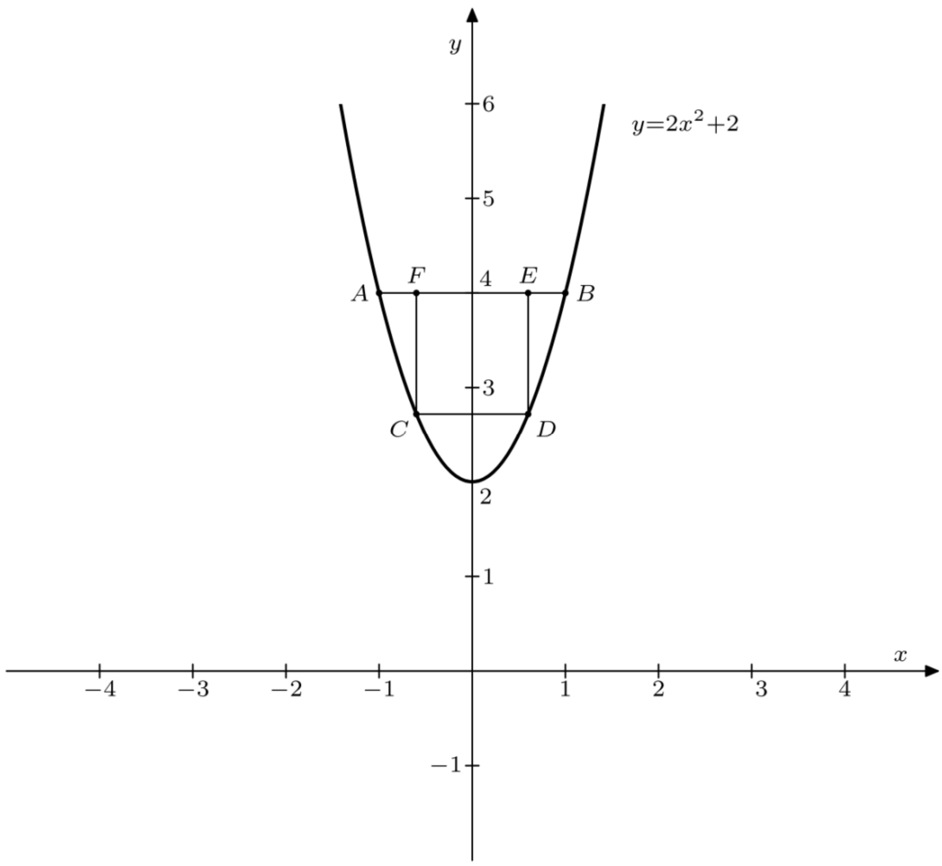
Zadanie 15. (0-7)

Rozważamy wszystkie prostokąty, których dwa wierzchołki leżą na odcinku AB, gdzie $A = (-1, 4)$ i $B = (1, 4)$, a pozostałe dwa na paraboli o równaniu $y = 2x^2 + 2$ (zobacz rysunek). Wyznacz wymiary tego z prostokątów, który ma największe pole. Oblicz to pole.



Rozwiązanie

Niech punkty C i D leżą na paraboli $y = 2x^2 + 2$, a punkty E i F leżą na odcinku AB (zob. rysunek). Oznaczmy przez x odległość punktu D od osi Oy.



Wówczas punkt D ma współrzędne $D=\left(x,2x^2+2\right)$, punkt C ma współrzędne $C=\left(-x,2x^2+2\right)$. Punkty E i F leżą na prostej o równaniu $y=4$, zatem ich współrzędne są równe: $E=\left(x,4\right)$ i $F=\left(-x,4\right)$.

Wyznaczamy długości boków CD i DE prostokąta CDEF:
$|CD|=2x$ oraz $|DE|=2-2x^2$ dla $0<x<1$.

Zatem pole prostokąta CDEF jest określone wzorem: $P\left(x\right)=2x\cdot\left(2-2x^2\right)$, czyli $P\left(x\right)=-4x^3+4x$ dla $0<x<1$.

Rozważamy funkcję $f\left(x\right)=-4x^3+4x$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wyznaczamy pochodną tej funkcji f: $f'\left(x\right)=-12x^2+4$.

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ponadto:

- $f'\left(x\right)<0$ w każdym z przedziałów $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ oraz $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$,
- $f'\left(x\right)>0$ w przedziale $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$ oraz $\left\langle\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ i rosnąca w przedziale $\left\langle-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\rangle$.

Ponieważ $P\left(x\right)=f\left(x\right)$ dla $x\in\left(0,1\right)$, więc w przedziale $x\in\left(0,1\right)$ funkcja $P\left(x\right)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f\left(x\right)$. Stąd wynika, że w punkcie $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ funkcja P przyjmuje wartość największą.

Obliczamy wymiary prostokąta: $|CD|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $|DE|=2-2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$.

Największe pole ma prostokąt o wymiarach $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{4}{3}$. Jest ono równe $\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Zadanie 16. (0-7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w których krótsza podstawa ma długość 5 i każde z ramion też ma długość 5. Oblicz długość dłuższej podstawy tego z rozpatrywanych trapezów, który ma największe pole. Oblicz to pole.

Rozwiązanie
Niech $2x+5$ oznacza długość dłuższej podstawy, a h wysokość trapezu.

h h

x x

Pole tego trapezu jest określone wzorem

$$P = \frac{2 \cdot 5 + 2x}{2} \cdot h = (5 + x) \cdot h \text{ i } 0 < x < 5 .$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność $x^2 + h^2 = 5^2$, stąd $h = \sqrt{25 - x^2}$.

Pole tego trapezu jest określone wzorem

$$P(x) = (5+x) \cdot \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{(5+x)^2 \cdot (25 - x^2)} =$$
$$= \sqrt{(5+x)^3 \cdot (5 - x)} = \sqrt{-x^4 - 10x^3 + 250x + 625},$$

gdzie $0 < x < 5$.

Należy obliczyć, dla jakiego x spełniającego nierówność $0 < x < 5$ funkcja P określona wzorem $P(x) = \sqrt{-x^4 - 10x^3 + 250x + 625}$ przyjmuje wartość największą.

Ponieważ funkcja pierwiastkowa ($y = \sqrt{t}$) jest rosnąca, więc wystarczy zbadać funkcję $f(x) = -x^4 - 10x^3 + 250x + 625$. Wyznaczamy pochodną tej funkcji:

$$f'(x) = -4x^3 - 30x^2 + 250 .$$

Następnie obliczamy miejsca zerowe pochodnej: $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{5}{2}$.

Ponadto:

- $f'(x) < 0$ w każdym z przedziałów $(-\infty, -5)$ oraz $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$,
- $f'(x) > 0$ w przedziale $\left(-5, \frac{5}{2}\right)$.

Zatem funkcja f jest malejąca w każdym z przedziałów $\left(-\infty, -5\right\rangle$ oraz $\left\langle\frac{5}{2}, +\infty\right)$ i rosnąca w przedziale $\left\langle -5, \frac{5}{2} \right\rangle$.

Ponieważ $P(x) = \sqrt{f(x)}$ dla $x \in (0,5)$, więc w przedziale $x \in (0,5)$ funkcja $P(x)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym funkcja $f(x)$. Stąd wynika, że w punkcie $x = \frac{5}{2}$ funkcja P przyjmuje wartość największą.

Zauważmy wreszcie, że jeżeli $x = \frac{5}{2}$, to $2x + 5 = 10$. Zatem dłuższa podstawa ma długość 10.

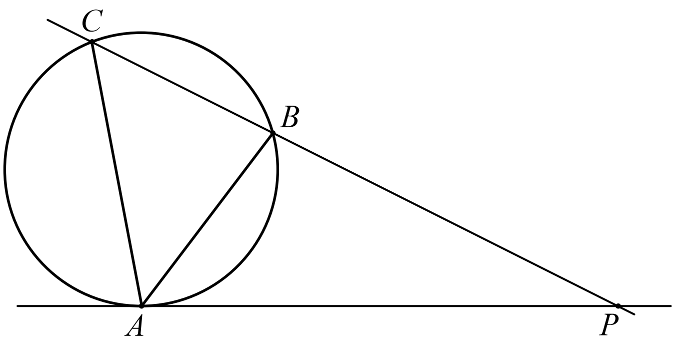
Obliczamy największe pole trapezu dla $x = \frac{5}{2}$:

$$P(x) = \left(5 + \frac{5}{2}\right) \cdot \sqrt{25 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{5}{2}\sqrt{3} = \frac{75}{4}\sqrt{3} .$$

Największe pole ma trapez, którego dłuższa podstawa ma długość 10. Pole tego trapezu jest równe $\frac{75\sqrt{3}}{4}$.

Zadanie 17. (0-3)

Dany jest trójkąt ABC i prosta k styczna w punkcie A do okręgu opisanego na tym trójkącie. Prosta BC przecina prostą k w punkcie P. Długości odcinków są odpowiednio równe: |AC| = 12, |CB| = 9, |BP| = 17.



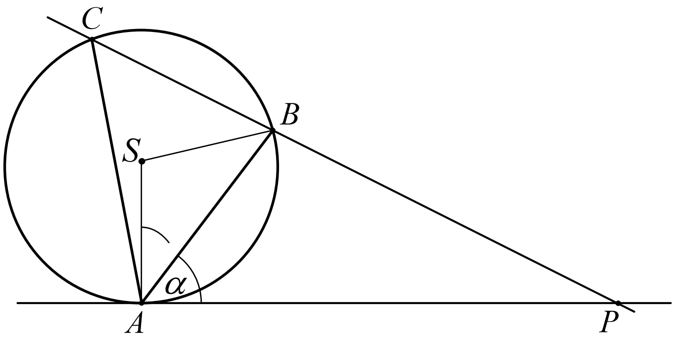
Oblicz długość odcinka AB. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie (I sposób)
Niech S oznacza środek okręgu opisanego na trójkącie ABC i niech $\alpha = |\measuredangle PAB|$. Kąt PAS jest prosty, więc $|\measuredangle BAS| = 90° - \alpha$. Trójkąt ABS jest równoramienny, zatem

$$|\measuredangle ASB| = 180° - 2 \cdot |\measuredangle BAS| = 180° - 2 \cdot (90° - \alpha) = 2\alpha.$$

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartych na tym samym łuku wynika, że

$$|\measuredangle ACB| = \frac{1}{2} \cdot |\measuredangle ASB| = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha.$$



Oznaczmy $|AB| = x$ oraz $|PA| = y$.

Trójkąty APB i CPA są podobne, gdyż $|\measuredangle PAB| = |\measuredangle PCA|$ i kąt przy wierzchołku P jest wspólnym kątem tych trójkątów. Zatem

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PA|},$$

$$\frac{y}{26}=\frac{17}{y},$$
$$y^2=17\cdot 26.$$

Stąd $y=\sqrt{17\cdot 26}$. Z podobieństwa trójkątów APB i CPA otrzymujemy też

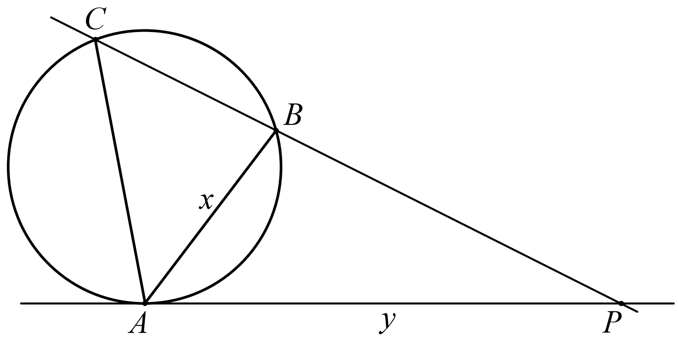
$$\frac{|AB|}{|PA|}=\frac{|CA|}{|PC|},$$
$$\frac{x}{y}=\frac{12}{26}.$$

Zatem $x=\frac{12y}{26}=\frac{12\sqrt{17\cdot 26}}{26}=\frac{12\sqrt{17}}{\sqrt{26}}=9,7032\ldots$

Kodujemy cyfry: 9, 7, 0.

Rozwiązanie (II sposób)

Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że kąty PAB i ACB są równe. Ponadto kąt przy wierzchołku P jest wspólnym kątem trójkątów APB i CPA. Zatem te trójkąty są podobne.



Stąd mając dane: |AC| = 12, |CB| = 9, |BP| = 17 i oznaczając |AB| = x, |AP| = y, otrzymujemy:

$$\frac{|PA|}{|PC|}=\frac{|PB|}{|PA|},$$
$$\frac{y}{26}=\frac{17}{y},$$
$$y^2=17\cdot 26.$$

Zatem $y=\sqrt{17\cdot 26}$. Z podobieństwa trójkątów APB i CPA otrzymujemy też

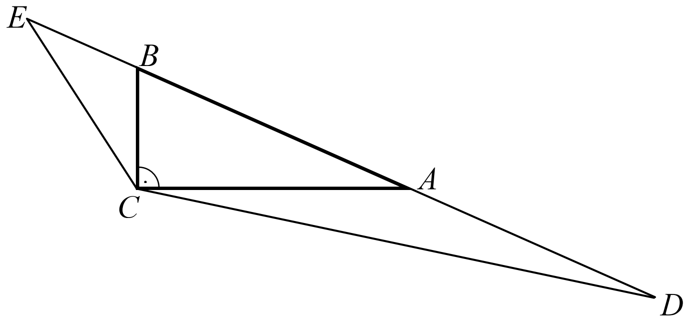
$$\frac{|AB|}{|PA|}=\frac{|CA|}{|PC|},$$
$$\frac{x}{y}=\frac{12}{26}.$$

Stąd $x=\frac{12y}{26}=\frac{12\sqrt{17\cdot 26}}{26}=\frac{12\sqrt{17}}{\sqrt{26}}=9,7032\ldots$

Kodujemy cyfry: 9, 7, 0.

Zadanie 18. (0-6)

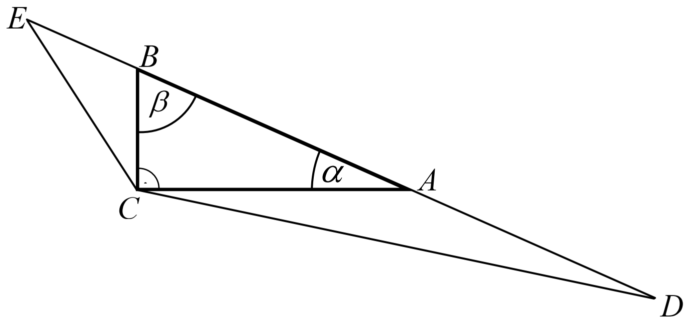
Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C i obwodzie równym $2p$. Na prostej AB obrano punkty D i E leżące na zewnątrz odcinka AB takie, że $|AD| = |AC|$ i $|BE| = |BC|$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że promień okręgu opisanego na trójkącie ECD jest równy $p\sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Niech $\alpha = |\ BAC|$, $\beta = |\ ABC|$ (zobacz rysunek).



Kąty CAD i CBE to kąty przyległe odpowiednio do kątów BAC i ABC trójkąta ABC, więc

$$|\ CAD| = 180^\circ - \alpha \text{ oraz } |\ CBE| = 180^\circ - \beta .$$

Trójkąty CAD i CBE są równoramienne, więc

$$|\ DCA| = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2} \text{ oraz } |\ ECB| = \frac{180^\circ - (180^\circ - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Zatem miara kąta ECD jest równa

$$|\ ECD| = |\ DCA| + 90^\circ + |\ ECB| = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ + \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Stąd

$$|\ ECD| = 90^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 135^\circ .$$

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ECD wynika, że

$$\frac{|ED|}{\sin\ ECD} = 2R,$$

gdzie R to promień okręgu opisanego na trójkącie ECD. Ponieważ $|ED| = a + b + c = 2p$ i

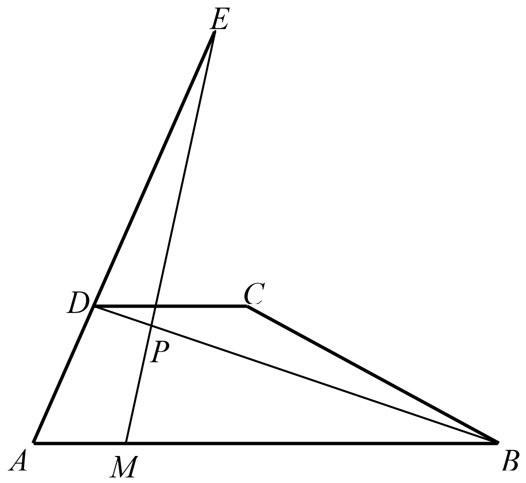
$\sin\ ECD = \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc

$$2R = \frac{2p}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Stąd $R = p\sqrt{2}$, co kończy dowód.

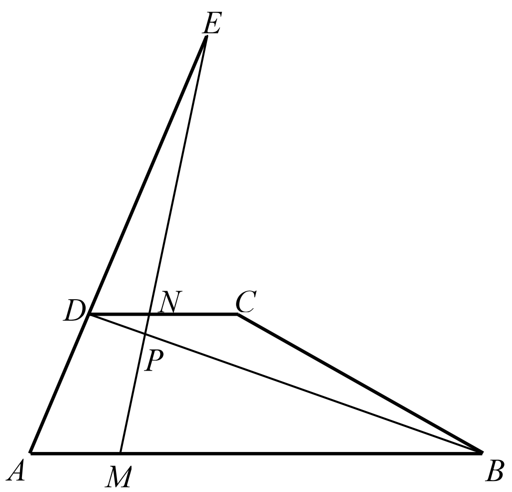
Zadanie 19. (0-3)

Ramię AD trapezu ABCD (w którym $AB \parallel CD$) przedłużono do punktu E takiego, że $|AE| = 3 \cdot |AD|$. Punkt M leży na podstawie AB oraz $|MB| = 4 \cdot |AM|$. Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P (zobacz rysunek).



Udowodnij, że $|BP| = 6 \cdot |PD|$.

Rozwiązanie
Niech N oznacza punkt przecięcia odcinka EM z prostą DC.



Trójkąt AME jest podobny do trójkąta DNE (kąty MAE i NDE są równe oraz kąty AME i DNE są równe, gdyż proste AB i DC są równoległe). Stąd

$$\frac{|AM|}{|AE|} = \frac{|DN|}{|DE|},$$

ale $|AE| = 3 \cdot |AD|$, więc $|DN| = \frac{2}{3} \cdot |AM|$.

Trójkąt MBP jest podobny do trójkąta NDP (kąty MBP i NDP są równe oraz kąty BMP i DNP, gdyż proste AB i DC są równoległe). Stąd

$$\frac{|BP|}{|BM|} = \frac{|DP|}{|DN|},$$

ale $|BM| = 4 \cdot |AM|$, więc $|BP| = \frac{4 \cdot |AM| \cdot |DP|}{|DN|} = \frac{4 \cdot |AM|}{\frac{2}{3}|AM|} \cdot |DP| = 6 \cdot |DP|$.

To kończy dowód.

Zadanie 20. (0-4)

Okrąg jest styczny do osi Ox w punkcie $A = (2,0)$. Punkt $B = (-1,9)$ leży na tym okręgu. Wyznacz równanie tego okręgu.

Rozwiązanie

Niech $S = (a,b)$ będzie środkiem szukanego okręgu. Ponieważ okrąg ten jest styczny do osi Ox w punkcie $A = (2,0)$, więc $S = (2,b)$. Z definicji okręgu wynika, że $|AS| = |BS|$, czyli

$$(2-2)^2 + (b-0)^2 = (2+1)^2 + (b-9)^2.$$

Stąd

$$b^2 = 9 + b^2 - 18b + 81,$$
$$b = 5.$$

Zatem $S = (2,5)$, a równanie okręgu ma postać $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Zadanie 21. (0-5)

Okrąg o środku $S = (3,2)$ leży wewnątrz okręgu o równaniu $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$ i jest do niego styczny. Wyznacz równanie prostej stycznej do obu tych okręgów.

Rozwiązanie

Środkiem okręgu o równaniu $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$ jest punkt $S_1 = (6,8)$, a promień tego okręgu jest równy 10. Środki S i S_1 okręgów leżą na prostej o równaniu $y = 2x - 4$.

Szukana styczna jest prostopadła do tej prostej, więc ma równanie postaci $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Odległość środka $S_1 = (6,8)$ od stycznej jest równa 10, zatem

$$\frac{\left|\frac{1}{2} \cdot 6 + 8 - b\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = 10,$$

$$|11 - b| = 10 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}},$$

$$|11-b|=5\sqrt{5}.$$

Stąd $11-b=5\sqrt{5}$ lub $11-b=-5\sqrt{5}$, czyli $b=11-5\sqrt{5}$ lub $b=11+5\sqrt{5}$. Otrzymujemy więc dwie proste o równaniach $y=-\frac{1}{2}x+11-5\sqrt{5}$ oraz $y=-\frac{1}{2}x+11+5\sqrt{5}$.

Odległość środka S od prostej o równaniu $y=-\frac{1}{2}x+11-5\sqrt{5}$ jest równa

$$\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot 3+2+11-5\sqrt{5}\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{29}{5}\sqrt{5}-10\cdot$$

Ponieważ $\frac{29}{5}\sqrt{5}-10<10$, więc ta prosta jest szukaną styczną.

Zadanie 22. (0-1)

Równanie $\sin^2 x=\sin x$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$

A. ma dokładnie 1 rozwiązanie.
B. ma dokładnie 2 rozwiązania.
C. ma dokładnie 3 rozwiązania.
D. nie ma rozwiązań.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie $\sin^2 x=\sin x$ do postaci $\sin x\cdot(\sin x-1)=0$, zatem $\sin x=0$ lub $\sin x=1$. Rozwiązaniami równania $\sin x=0$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$ jest $x=0$ oraz $x=\pi$, a rozwiązaniem równania $\sin x=1$ jest $x=\frac{\pi}{2}$. Stąd równanie $\sin^2 x=\sin x$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$ ma dokładnie 3 rozwiązania.

Zdający powinien zaznaczyć odpowiedź C.

Zadanie 23. (0-4)

Rozwiąż równanie $\sin 5x-\cos 2x+\sin x=0$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie, korzystając ze wzoru na sumę sinusów: $2\sin 3x\cos 2x-\cos 2x=0$.

Stąd $\cos 2x\cdot(2\sin 3x-1)=0$. Zatem $\cos 2x=0$ lub $2\sin 3x-1=0$.

Rozwiązaniami równania $\sin 5x-\cos 2x+\sin x=0$ są liczby: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, lub $x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, lub $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zadanie 24. (0-3)

Wykaż, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość: $4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)=1+3\cos^2 2\alpha$

Rozwiązanie

Korzystając z tożsamości

$$a^6+b^6=\left(a^2+b^2\right)\left(a^4-a^2b^2+b^4\right)=\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(\left(a^2+b^2\right)^2-3a^2b^2\right),$$

przekształcamy wyrażenie $4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)$ i otrzymujemy:

$$4\left(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\right)=4\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)\left(\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=$$

$$=4\left(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right).$$

Przekształcamy teraz prawą stronę równości, korzystając ze wzoru na cosinus kąta podwojonego.

$$1+3\cos^2 2\alpha=1+3\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)^2=1+3\left(\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=$$

$$=1+3\left(1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)=4-12\sin^2\alpha\cos^2\alpha=4\left(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right).$$

To kończy dowód.

Zadanie 25. (0-2)

Rozwiąż nierówność $\cos 5x>\frac{1}{2}$ dla $-\pi\le x\le\pi$.

Rozwiązanie

Rozwiązujemy nierówność $\cos 5x>\frac{1}{2}$.

Zatem $-\frac{\pi}{3}+2k\pi<5x<\frac{\pi}{3}+2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, czyli

$-\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}<x<\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązaniami tej nierówności dla $-\pi\le x\le\pi$ są:

$-\frac{13\pi}{15}<x<-\frac{11\pi}{15}$ lub $-\frac{7\pi}{15}<x<-\frac{5\pi}{15}$ lub $-\frac{\pi}{15}<x<\frac{\pi}{15}$ lub $\frac{5\pi}{15}<x<\frac{7\pi}{15}$ lub $\frac{11\pi}{15}<x<\frac{13\pi}{15}$.

Zadanie 26. (0-3)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Kąt α jest kątem między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi. Kąt β jest kątem przy podstawie ściany bocznej (tzn. kątem między krawędzią podstawy i krawędzią boczną ostrosłupa).

Wykaż, że $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta=-1$.

Rozwiązanie

Oznaczmy: a – długość krawędzi podstawy, h – wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka podstawy, c – długość odcinka łączącego wierzchołek podstawy ze spodkiem wysokości h.

Na podstawie twierdzenia cosinusów mamy:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = h^2 + h^2 - 2h \cdot h \cdot \cos\alpha .$$

Stąd

$$\cos\alpha = \frac{h^2 - a^2}{h^2}.$$

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy

$$c^2 = a^2 - h^2 .$$

Ponadto

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{c}, \text{ a stąd wynika, że } \operatorname{tg}^2\beta = \frac{h^2}{c^2}.$$

Obliczamy zatem

$$\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta = \frac{h^2 - a^2}{h^2} \cdot \frac{h^2}{c^2} = \frac{-\left(a^2 - h^2\right)}{c^2} = \frac{-c^2}{c^2} = -1.$$

To kończy dowód.

Zadanie 27. (0-4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Płaszczyzna przechodząca przez krawędź podstawy i środek wysokości tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Wyznacz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia:

A, B, C - wierzchołki podstawy ostrosłupa

W - wierzchołek ostrosłupa

M - środek boku |AB|

O - spodek wysokości

S - środek wysokości |OW|

W trójkącie równobocznym ABC mamy:

$$|AB| = a, \ |CM| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \ |OM| = \frac{1}{3}|CM| = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Stąd

$$|OS| = |OM| \cdot \operatorname{tg}\alpha, \text{ czyli } |OW| = 2 \cdot |OS| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha .$$

Zatem

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3}{12} \cdot \operatorname{tg}\alpha .$$

Następnie

$$|MW|^2 = |OM|^2 + |OW|^2 = \frac{3a^2}{36} + \frac{3a^2}{9}\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{3}\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{a^2}{12}\left(1+4\operatorname{tg}^2\alpha\right),$$

$$|MW| = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}$$

i stąd otrzymujemy

$$P_b = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Zadanie 28. (0-4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi równej 1. Punkt S jest środkiem krawędzi DH. Odcinek DW jest wysokością ostrosłupa $ACSD$ opuszczoną z wierzchołka D na ścianę ACS. Oblicz długości odcinków AW, CW i SW.

Rozwiązanie

Łączymy punkty A i S, A i C oraz C i S. Niech T oznacza punkt przecięcia przekątnych AC i BD podstawy tego sześcianu.

Punkt S leży na krawędzi DH, więc $AS = CS$, a zatem trójkąt ACS, stanowiący podstawę ostrosłupa $ACSD$, jest trójkątem równoramiennym. Wynika stąd, że odcinek ST jest wysokością tego trójkąta. Długość odcinka ST obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego TSD:

$$|ST|^2 = |SD|^2 + |DT|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \text{ czyli } |ST| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odcinek DW jest wysokością trójkąta prostokątnego TDS poprowadzoną do przeciwprostokątnej TS. Długość odcinka DW obliczymy zapisując na dwa sposoby pole trójkąta TDS:

$$\frac{1}{2}\cdot|SD|\cdot|TD| = \frac{1}{2}\cdot|ST|\cdot|DW|,$$

$$|DW| = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Stąd i z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego SWD wynika, że:

$$|SW| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Wysokość ST trójkąta równoramiennego ACS jest zawarta w osi symetrii tego trójkąta. Wynika stąd, że $AW = CW$. Długość odcinka AW obliczamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ATW, w którym

$$|TW| = |ST| - |SW| = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Otrzymujemy zatem

$$|AW|^2 = |AT|^2 + |TW|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{5}{6},$$

skąd

$$|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Podsumowując, szukane odcinki mają długości: $|AW| = |CW| = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $|SW| = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Zadanie 29. (0-6)

Kwadrat $ABCD$ o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$. Odcinek HS jest wysokością ostrosłupa, przy czym punkt H dzieli przekątną AC podstawy w stosunku $2:1$. Krawędzie boczne BS i DS mają długość równą 1. Oblicz objętość tego ostrosłupa oraz długości krawędzi AS i CS.

Rozwiązanie

Niech T oznacza punkt przecięcia przekątnych AC i BD podstawy ostrosłupa

Ponieważ $|AC| = \sqrt{2}$, więc $|CH| = \frac{\sqrt{2}}{3}$ oraz $|HT| = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Trójkąt BSD jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, dlatego że jego ramiona mają długości $|BS| = |DS| = 1$, a podstawa $|BD| = \sqrt{2}$. Stąd wynika, że $|ST| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Obliczamy zatem wysokość HS tego ostrosłupa, stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta SHT:

$$|HS|^2 = |ST|^2 - |HT|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{4}{9}, \text{ skąd wynika, że } |HS| = \frac{2}{3}.$$

Objętość V tego ostrosłupa jest zatem równa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Pozostaje obliczyć jeszcze długości krawędzi bocznych AS i CS. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dwukrotnie, najpierw do trójkąta AHS, otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AH|^2 + |HS|^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}, \text{ więc } |AS| = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

natomiast do trójkąta CHS

$$|CS|^2 = |CH|^2 + |HS|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}, \text{ skąd } |CS| = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

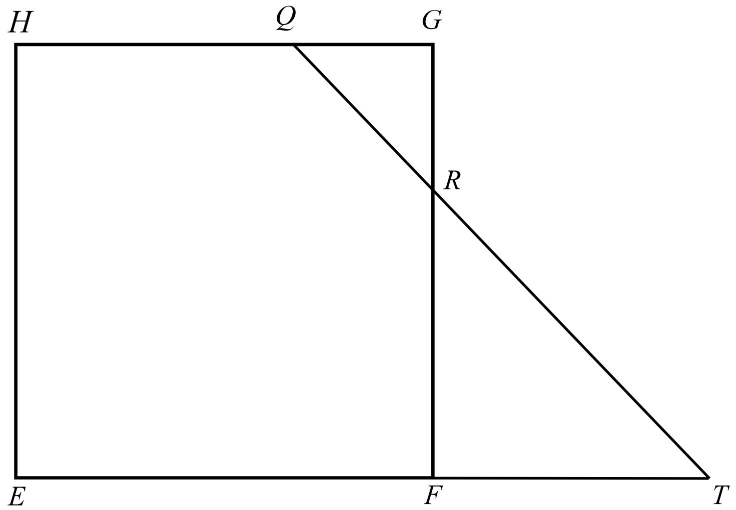
Uwaga

Rozważany ostrosłup nie jest prawidłowy, a wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi.

Zadanie 30. (0-4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$, którego krawędź ma długość 15. Punkty Q i R dzielą krawędzie HG i FG w stosunku $2:1$, to znaczy $|HQ| = |FR| = 10$. Płaszczyzna AQR przecina krawędzie DH i BF odpowiednio w punktach P i S. Oblicz długości odcinków DP i BS.

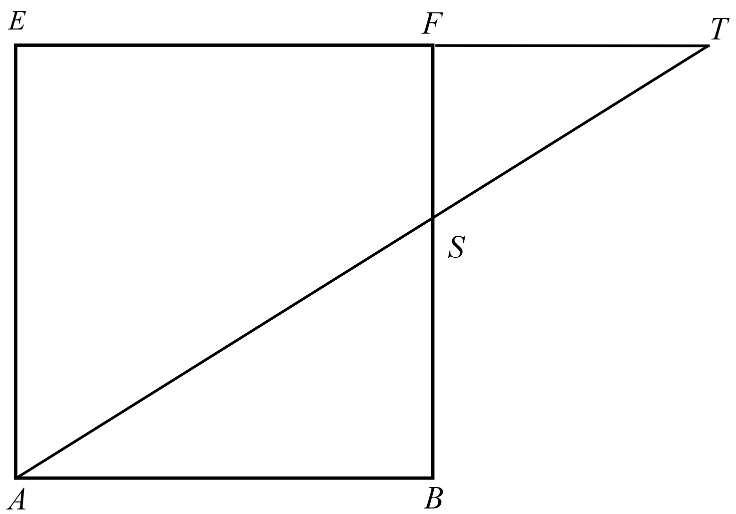
Rozwiązanie
Rozważamy kwadrat $EFGH$. Niech T oznacza punkt przecięcia przedłużeń odcinków QR
i EF (zobacz rysunek).



Długości odcinków: |QG| = |GR| = 5, |RF| = |FT| = 10

Trójkąty prostokątne RFT i RGQ są podobne na mocy cechy kkk. Stąd wynika, że $|FT| = 10$.

Teraz rozważamy kwadrat $ABFE$ (zobacz rysunek).



Długości odcinków: |FT| = 10, |FS| = x, |AB| = 15, |BS| = 15 - x
Trójkąty prostokątne ABS i TFS są podobne na mocy cechy kkk. Możemy więc zapisać równanie

$$\frac{|SF|}{|FT|}=\frac{|BS|}{|AB|}\text{, a zatem } \frac{x}{10}=\frac{15-x}{15}.$$

Rozwiązujemy to równanie

$$15x=150-10x,\quad x=6.$$

Zatem długość szukanego odcinka BS jest równa 9. Ponieważ punkty B i D leżą symetrycznie względem płaszczyzny $ACGE$, więc $|DP|=|BS|=9$.

Zadanie 31. (0-3)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i na dokładnie dwóch miejscach stoją cyfry parzyste.

Rozwiązanie

Rozwiązanie zadania składa się z trzech kroków. W kroku pierwszym obliczamy, na ile sposobów można wybrać dwa miejsca (spośród siedmiu), na których stoją cyfry parzyste. Ten krok możemy wykonać czterema sposobami.

- Możemy skorzystać ze wzoru na liczbę dwuelementowych kombinacji ze zbioru siedmioelementowego; wyraża się ona współczynnikiem dwumianowym $\binom{7}{2}$. Ten współczynnik możemy odczytać z trójkąta Pascala lub obliczyć ze wzoru
$$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}.$$
Mamy zatem
$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{6\cdot 7\cdot 5!}{2!5!}=\frac{6\cdot 7}{2}=3\cdot 7=21.$$
- Możemy po prostu wszystkie te sposoby wyboru dwóch miejsc wypisać (kwadracik pusty oznacza miejsce dla cyfry nieparzystej, kwadracik pełny — dla parzystej):

1:	■	■	□	□	□	□	□
2:	■	□	■	□	□	□	□
3:	■	□	□	■	□	□	□
4:	■	□	□	□	■	□	□
5:	■	□	□	□	□	■	□
6:	■	□	□	□	□	□	■
7:	□	■	■	□	□	□	□
8:	□	■	□	■	□	□	□
9:	□	■	□	□	■	□	□
10:	□	■	□	□	□	■	□
11:	□	■	□	□	□	□	■
12:	□	□	■	■	□	□	□
13:	□	□	■	□	■	□	□
14:	□	□	■	□	□	■	□
15:	□	□	■	□	□	□	■
16:	□	□	□	■	■	□	□
17:	□	□	□	■	□	■	□
18:	□	□	□	■	□	□	■
19:	□	□	□	□	■	■	□
20:	□	□	□	□	■	□	■
21:	□	□	□	□	□	■	■

- Możemy także te możliwości zliczać: jeśli pierwsza (licząc od lewej strony) cyfra parzysta stoi na pierwszym miejscu, to drugą możemy ustawić na jednym z sześciu miejsc (od drugiego do siódmego); jeśli pierwsza (od lewej strony) cyfra parzysta stoi na drugim miejscu, to drugą możemy ustawić na jednym z pięciu miejsc i tak dalej. Wreszcie, jeśli pierwsza cyfra parzysta stoi na szóstym miejscu, to druga może stać tylko na miejscu siódmym. Łącznie mamy więc
$$6+5+4+3+2+1=21$$
sposobów wyboru dwóch miejsc dla cyfr parzystych.
- Możemy wreszcie rozumować następująco: jedną cyfrę parzystą możemy ustawić na jednym z 7 miejsc, drugą na jednym z sześciu miejsc. W ten sposób każde ustawienie policzyliśmy dwukrotnie, np. ustawienie

□ □ ■ □ ■ □ □

możemy otrzymać wybierając najpierw miejsce trzecie, a potem miejsce piąte lub wybierając najpierw miejsce piąte, a potem miejsce trzecie. Zatem liczba sposobów wyboru tych dwóch miejsc jest równa
$$\frac{7\cdot 6}{2}=7\cdot 3=21.$$

W kroku drugim obliczamy, na ile sposobów możemy na miejscach wybranych dla cyfr parzystych i nieparzystych napisać te cyfry. Skorzystamy dwukrotnie z reguły mnożenia. Najpierw na wybranych dwóch miejscach ustawiamy cyfry parzyste. Ponieważ w zapisie liczby nie występuje zero, więc na każdym miejscu mamy do wyboru cztery cyfry: 2, 4, 6, 8. Mamy zatem $4^2=16$ sposobów zapisania cyfr parzystych na wybranych miejscach. Wreszcie na każdym z pozostałych pięciu miejsc zapisujemy jedną z pięciu cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Mamy zatem $5^5=3125$ sposobów zapisania cyfr nieparzystych na pozostałych miejscach.
W kroku trzecim obliczamy, ile jest liczb siedmiocyfrowych spełniających warunki opisane w zadaniu. Korzystamy jeszcze raz z reguły mnożenia i otrzymujemy
$$21\cdot 4^2\cdot 5^5=21\cdot 16\cdot 3125=1\ 050\ 000$$
liczb.

Zadanie 32. (0-4)

Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2 i 3, wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać.

Rozwiązanie
Zauważmy najpierw, że istnieje tylko 27 liczb trzycyfrowych, których cyfry są wybrane spośród cyfr 1, 2 i 3. Pierwszą cyfrę możemy bowiem wybrać na 3 sposoby, drugą także na trzy sposoby (cyfry mogą się powtarzać) i trzecią też na trzy sposoby. Najprostszy sposób rozwiązania zadania polega zatem na wypisaniu i dodaniu (np. na kalkulatorze) tych liczb. Oto one:
$$111+112+113+121+122+123+131+132+133=1098,$$
$$211+212+213+221+222+223+231+232+233=1998,$$
$$311+312+313+321+322+323+331+332+333=2898.$$

Suma wszystkich liczb jest równa
$$1098+1998+2898=2898.$$

Liczby te można łatwo dodać bez używania kalkulatora. Zauważmy, że sumy liczb w trzech wierszach są równe:

$$9\cdot 100 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 900 + 198 = 1098,$$

$$9\cdot 200 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 1800 + 198 = 1998,$$

$$9\cdot 300 + (11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33) = 2700 + 198 = 2898.$$

Dodawanie

$$11 + 12 + 13 + 21 + 22 + 23 + 31 + 32 + 33 = 198$$

może być wykonane w pamięci; pozostałe dodawania można łatwo wykonać też w pamięci lub pisemnie. Najważniejsze było zauważenie, że we wszystkich dodawaniach występowała ta sama suma liczb dwucyfrowych i zmieniały się tylko sumy setek. Ta obserwacja będzie podstawą dla drugiego sposobu rozwiązania.

Obliczając sumę wszystkich 27 liczb, każdą z tych liczb zapiszemy w postaci

$$a\cdot 100+b\cdot 10+c$$

i będziemy oddzielnie dodawać wielokrotności 100, oddzielnie wielokrotności 10 i wreszcie oddzielnie cyfry jedności. Policzmy, w ilu liczbach jedynka występuje na pierwszym miejscu (tzn. jako cyfra setek). Otóż na drugim miejscu możemy postawić jedną z trzech cyfr i na trzecim też jedną z trzech cyfr. Zatem jedynka jest na pierwszym miejscu w dziewięciu liczbach. W sumie wszystkich dwudziestu siedmiu liczb dziewięć razy wystąpi składnik 100. Podobnie 9 razy wystąpi składnik 200 i 9 razy wystąpi składnik 300. Zatem składniki postaci $a\cdot 100$ dadzą sumę

$$9\cdot 100 + 9\cdot 200 + 9\cdot 300 = 9\cdot 100\cdot (1 + 2 + 3) = 9\cdot 100\cdot 6 = 5400.$$

Tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy na drugim miejscu (tzn. jako cyfra dziesiątek). Zatem składniki postaci $b\cdot 10$ dadzą sumę

$$9\cdot 10 + 9\cdot 20 + 9\cdot 30 = 9\cdot 10\cdot (1 + 2 + 3) = 9\cdot 10\cdot 6 = 540.$$

Wreszcie tak samo pokazujemy, że każda cyfra wystąpi 9 razy jako cyfra jedności. Suma cyfr jedności jest zatem równa

$$9\cdot 1 + 9\cdot 2 + 9\cdot 3 = 9\cdot (1 + 2 + 3) = 9\cdot 6 = 54.$$

Suma wszystkich liczb wynosi zatem.

$$5400 + 540 + 54 = 5994.$$

Zadanie 33. (0-7)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24.

Rozwiązanie

Rozkładamy liczbę 24 na czynniki pierwsze $24=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2$.

Mamy więc pięć, parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 24:

1. Wśród cyfr tej liczby są trzy dwójki, jedna trójka i cztery jedynki ($24=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot\binom{7}{3}=280$ — wybieramy jedno miejsce z ośmiu dla trójki a następnie trzy miejsca z pozostałych siedmiu dla dwójki

   albo tak:
   - $\binom{8}{4}\cdot 4=280$ — wybieramy cztery miejsca dla cyfr różnych od jedynki, a następnie spośród nich wybieramy miejsce dla trójki,

   albo tak:

- $\frac{8!}{3!\cdot 4!} = 280$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32221111.

2. Wśród cyfr tej liczby są trójka, czwórka, dwójka i pięć jedynek ($24 = 3\cdot 4\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot 7\cdot 6 = 336$ — wybieramy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa

   albo tak:
   - $\binom{8}{3}\cdot 3! = 336$ — wybieramy trzy miejsca dla cyfr: trzy, cztery, dwa, następnie przestawiamy te cyfry między sobą,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{5!} = 336$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 32411111.
3. Wśród cyfr tej liczby są trójka, ósemka i sześć jedynek ($24 = 3\cdot 8\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot 7 = 56$ — wybieramy miejsce dla trójki i z pozostałych dla ósemki

   albo tak:
   - $\binom{8}{2}\cdot 2 = 56$ — wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla trójki i ósemki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{6!} = 56$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 38111111.
4. Wśród cyfr tej liczby są szóstka, czwórka i sześć jedynek ($24 = 6\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot 7 = 56$ — wybieramy miejsce dla szóstki i czwórki

   albo tak:
   - $\binom{8}{2}\cdot 2 = 56$ — wybieramy dwa miejsca z ośmiu dla szóstki i czwórki, następnie wybieramy miejsce dla każdej z nich,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{6!} = 56$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 64111111.
5. Wśród cyfr tej liczby są dwie dwójki, jedna szóstka i pięć jedynek($24 = 6\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Liczbę takich liczb można obliczyć na przykład tak:
   - $8\cdot\binom{7}{2} = 168$ — wybieramy miejsce dla szóstki, następnie dwa miejsca z siedmiu dla dwójek

   albo tak:
   - $\binom{8}{3}\cdot 3 = 168$ — wybieramy trzy miejsca z ośmiu dla szóstki i dwóch dwójek, następnie spośród nich wybieramy miejsce dla szóstki,

   albo tak:
   - $\frac{8!}{2!\cdot 5!} = 168$ — ustawiamy na wszystkie możliwe sposoby cyfry liczby 62211111.

Zatem wszystkich liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 24, jest
$$280 + 336 + 56 + 56 + 168 = 896.$$

Zadanie 34. (0-6)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5.

Rozwiązanie

Wszystkie liczby stucyfrowe o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5 możemy podzielić na 4 grupy w zależności od tego, jaka cyfra stoi na pierwszym miejscu liczby:

1. Liczba $5000\ldots000$,w której po cyfrze 5następuje 99 zer. Jest jedna taka liczba.
2. Liczby postaci $3000\ldots1\ldots000\ldots1\ldots000$, w których po cyfrze 3występuje 97 cyfr 0 i dwie cyfry 1, stojące na dwóch miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $\binom{99}{2} = \frac{99\cdot 98}{2} = 99\cdot 49 = 4851$ takich liczb.
3. Liczby postaci $1000\ldots3\ldots000\ldots1\ldots000$ lub $1000\ldots1\ldots000\ldots3\ldots000$, w których po cyfrze 1 występuje 97 cyfr 0 oraz cyfry 1 i 3(w dowolnej kolejności), stojące na dwóch miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $99\cdot 98 = 9702$ takich liczb.
4. Liczby postaci $1000\ldots1\ldots000\ldots1\ldots000\ldots1\ldots000\ldots1\ldots000$, w których po cyfrze 1 występuje 95 cyfr 0 i cztery cyfry 1, stojące na czterech miejscach wybranych z 99 możliwych miejsc. Jest $\binom{99}{4} = \frac{99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}{24} = 33\cdot 49\cdot 97\cdot 24 = 3\,764\,376$ takich liczb.

Zatem wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5, jest

$$1 + 4851 + 9702 + 3\,764\,376 = 3\,778\,930.$$

Zadanie 35. (0-3)

Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie dwuelementowe podzbiory (pary nieuporządkowane, kombinacje) zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}$. Jest to model klasyczny.

Wprowadzamy oznaczenia:

A — wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8,

B — suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta.

Mamy obliczyć $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{|A\cap B|}{|B|}$.

Zdarzeniu B sprzyjają kombinacje złożone z jednej liczby nieparzystej i jednej parzystej, $|B| = 7\cdot 6 = 42$,

Zdarzeniu $A\cap B$ sprzyjają kombinacje złożone z liczby 8 i jednej liczby nieparzystej, $|A\cap B| = 1\cdot 7 = 7$,

stąd

$$P(A \mid B) = \frac{7}{42} = \frac{1}{6}.$$

Zatem prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 8, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta, jest równe $\frac{1}{6}$.

Zadanie 36. (0-3)

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0,7$ i $P(B)=0,8$, to $P(A|B)\geq 0,625$.
$P\left(A|B\right)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe.

Rozwiązanie
$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
Wykażemy najpierw, że jeżeli $P(A)=0,7$ i $P(B)=0,8$, to $P(A\cap B)\geq 0,5$.
Wiemy, że $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ oraz $P(A\cup B)\leq 1$.
Mamy więc: $1\geq P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, stąd $P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1$, czyli $P(A\cap B)\geq 0,5$.
Stąd $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\geq\frac{0,5}{0,8}=0,625$.

Zadanie 37. (0-4)

Wybieramy losowo jedną liczbę ze zbioru $\{1,2,3\}$ i gdy otrzymamy liczbę n, to rzucamy n razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Rozwiązanie
Wprowadzamy oznaczenia dla zdarzeń:
B_1 - wylosujemy liczbę 1,
B_2 - wylosujemy liczbę 2,
B_3 - wylosujemy liczbę 3,
A - otrzymamy co najmniej jednego orła.
Zdarzenia B_1, B_2 i B_3 spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, ponieważ

$$B_1\cup B_2\cup B_3=\Omega,\ B_1\cap B_2=B_1\cap B_3=B_2\cap B_3=\varnothing,\ P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}>0.$$

Stosując twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym do zdarzenia A, otrzymujemy
$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)$.
Ponieważ $P(A|B_1)=\frac{1}{2}$, $P(A|B_2)=\frac{3}{4}$, $P(A|B_3)=\frac{7}{8}$, więc
$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{17}{24}$.
Zatem prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej jednego orła jest równe $\frac{17}{24}$.

Uwaga
Zdający może rozwiązać zadanie za pomocą drzewa.

Zadanie 38. (0-2)

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω. Wykaż, że jeżeli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, to $P(A \cap B') = P(A)P(B')$.
B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia B.

Rozwiązanie

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B')$$