Przykładowe zadania z matematyki na poziomie podstawowym wraz z rozwiązaniami

Zadanie 1. (0-1)

Liczba $3^{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt[3]{9^2}$ jest równa

A. 3^3

B. $3^{\frac{32}{9}}$

C. 3^4

D. 3^5

Rozwiązanie C

Zadanie 2. (0-1)

Liczba $\log 24$ jest równa

A. $2\log 2 + \log 20$

B. $\log 6 + 2\log 2$

C. $2\log 6 - \log 12$

D. $\log 30 - \log 6$

Rozwiązanie B

Zadanie 3. (0-1)

Rozwiązaniem równania $\frac{x-3}{2-x} = \frac{1}{2}$ jest liczba

A. $-\frac{4}{3}$

B. $-\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{8}{3}$

Rozwiązanie D

Zadanie 4. (0-1)

Mniejszą z dwóch liczb spełniających równanie $x^2 + 5x + 6 = 0$ jest

A. -6
B. -3
C. -2
D. -1

Rozwiązanie B

Zadanie 5. (0-1)

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 \geq 5$ jest

A. $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}, +\infty\right)$
B. $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right\rangle \cup \left\langle\sqrt{5}, +\infty\right)$
C. $\left\langle\sqrt{5}, +\infty\right)$
D. $\left\langle 5, +\infty\right)$

Rozwiązanie B

Zadanie 6. (0-1)

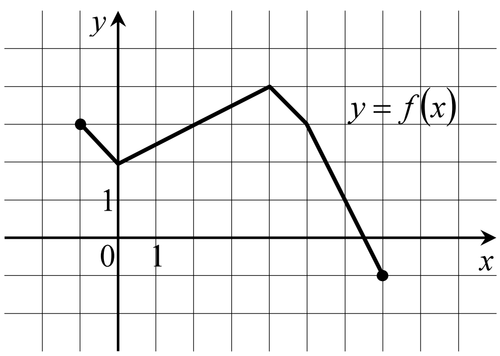
Liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji liniowej $f(x) = (2-m)x + 1$. Wynika stąd, że

A. $m = 0$
B. $m = 1$
C. $m = 2$
D. $m = 3$

Rozwiązanie D

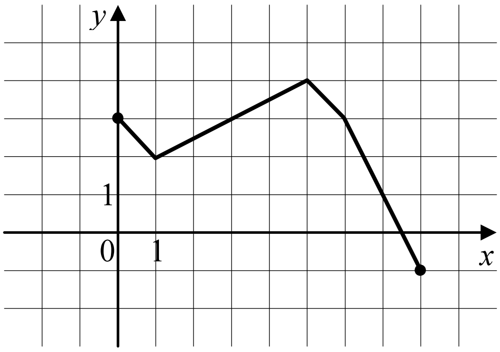
Zadanie 7. (0-1)

Rysunek przedstawia wykres funkcji $y = f(x)$.

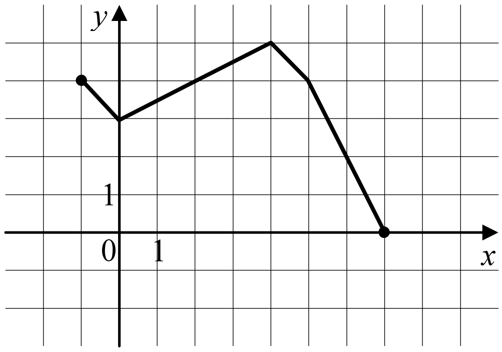


Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x+1)$.

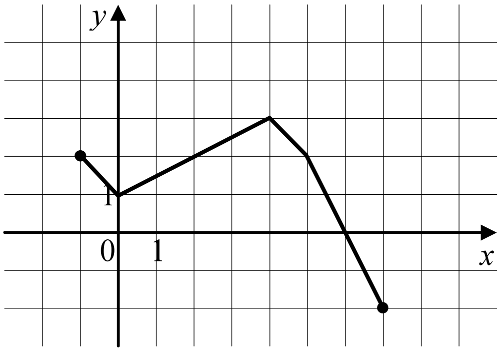
A.



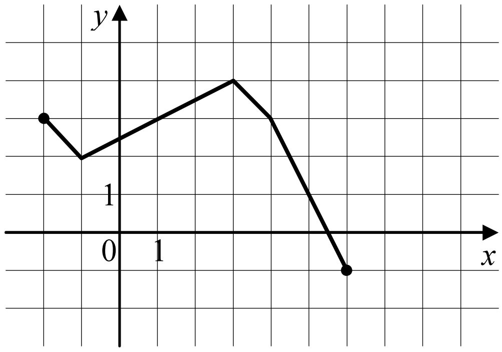
B.



C.



D.



Rozwiązanie D

Zadanie 8. (0-1)

Wskaż równanie osi symetrii paraboli określonej równaniem $y = -x^2 + 4x - 11$.

A. $x = -4$
B. $x = -2$
C. $x = 2$
D. $x = 4$

Rozwiązanie C

Zadanie 9. (0-1)

Prosta o równaniu $y = a$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 6x - 10$. Wynika stąd, że

A. $a = 3$
B. $a = 0$
C. $a = -1$
D. $a = -3$

Rozwiązanie C

Zadanie 10. (0-1)

Jaka jest najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + 4x - 3$ w przedziale $\langle 0,3 \rangle$?

A. -7
B. -4
C. -3
D. -2

Rozwiązanie C

Zadanie 11. (0-1)

Które z równań opisuje prostą prostopadłą do prostej o równaniu $y = 4x + 5$?

A. $y = -4x + 3$
B. $y = -\frac{1}{4}x + 3$
C. $y = \frac{1}{4}x + 3$
D. $y = 4x + 3$

Rozwiązanie B

Zadanie 12. (0-1)

Punkty $A = (-1,3)$ i $C = (7,9)$ są przeciwległymi wierzchołkami prostokąta ABCD. Promień okręgu opisanego na tym prostokącie jest równy

A. 10
B. $6\sqrt{2}$
C. 5
D. $3\sqrt{2}$

Rozwiązanie C

Zadanie 13. (0-1)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Wówczas

A. $\cos\alpha < \frac{3}{4}$
B. $\cos\alpha = \frac{3}{4}$
C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{13}}{4}$
D. $\cos\alpha > \frac{\sqrt{13}}{4}$

Rozwiązanie D

Zadanie 14. (0-1)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Jaki warunek spełnia kąt α?

A. $\alpha < 30^\circ$
B. $\alpha = 30^\circ$
C. $\alpha = 60^\circ$
D. $\alpha > 60^\circ$

Rozwiązanie A

Zadanie 15. (0-1)

Kąt środkowy i kąt wpisany w okrąg są oparte na tym samym łuku. Suma ich miar jest równa 180°. Jaka jest miara kąta środkowego?

A. 60°
B. 90°
C. 120°
D. 135°

Rozwiązanie C

Zadanie 16. (0-1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = (-3)^n \cdot (9 - n^2)$ dla $n \geq 1$. Wynika stąd, że

A. $a_3 = -81$
B. $a_3 = -27$
C. $a_3 = 0$
D. $a_3 > 0$

Rozwiązanie C

Zadanie 17. (0-1)

Liczby $x-1$, 4 i 8 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Wówczas liczba x jest równa

A. 3
B. 1
C. -1
D. -7

Rozwiązanie B

Zadanie 18. (0-1)

Liczby -8, 4 i $x+1$ (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Wówczas liczba x jest równa

A. -3
B. $-1,5$
C. 1
D. 15

Rozwiązanie A

Zadanie 19. (0-1)

Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, które są podzielne przez 6 lub przez 10, jest

A. 25
B. 24
C. 21
D. 20

Rozwiązanie C

Zadanie 20. (0-1)

Liczba wszystkich sposobów, na jakie Ala i Bartek mogą usiąść na dwóch spośród pięciu miejsc w kinie, jest równa

A. 25
B. 20
C. 15
D. 12

Rozwiązanie B

Zadanie 21. (0-2)

Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x}=-\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Lewa strona równania jest określona dla $x \neq \frac{1}{2}$. Przenosimy wszystko na lewą stronę i sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika:

$$\frac{2-3x}{1-2x}+\frac{1}{2}=0, \qquad \frac{2(2-3x)+(1-2x)}{2(1-2x)}=0, \qquad \frac{5-8x}{2(1-2x)}=0.$$

Stąd otrzymujemy $5-8x=0$, czyli $x=\frac{5}{8}$. Dla tej wartości x obie strony równania są określone, więc liczba $x=\frac{5}{8}$ jest szukanym rozwiązaniem równania.

Zadanie 22. (0-2)

Rozwiąż nierówność $x^2 + 6x - 7 \le 0$.

Rozwiązanie
Korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego lub dostrzegając rozkład na czynniki $x^2 + 6x - 7 = (x+7)(x-1)$, otrzymujemy dwa pierwiastki trójmianu kwadratowego: $x_1 = -7$, $x_2 = 1$. Ponieważ parabola o równaniu $y = x^2 + 6x - 7$ ma ramiona skierowane do góry, leży ona poniżej osi Ox między swoimi miejscami zerowymi. Zatem rozwiązaniem nierówności jest przedział domknięty $\langle -7, 1 \rangle$.

Zadanie 23. (0-2)

Oblicz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 1$ w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$.

Rozwiązanie
Wyznaczmy współrzędne wierzchołka paraboli o równaniu $y = x^2 - 6x + 1$. Mamy $x_w = -\frac{b}{2a} = 3$, $y_w = -\frac{\Delta}{4a} = -8$. Ponieważ parabola ma ramiona skierowane do góry, to w przedziale $(-\infty, 3\rangle$ dana funkcja maleje. Zatem maleje także na zawartym w nim przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Wobec tego najmniejszą wartość przyjmie ona w prawym końcu, czyli dla $x = 1$. Tą wartością jest $y = 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -4$.

Zadanie 24. (0-2)

O funkcji liniowej f wiadomo, że $f(1) = 2$ oraz że do wykresu tej funkcji należy punkt $P = (-2, 3)$. Wyznacz wzór funkcji f.

Rozwiązanie
Funkcja f jest liniowa, więc jej wzór możemy zapisać w postaci: $f(x) = ax + b$. Z warunku $f(1) = 2$ wynika, że $2 = a + b$. Skoro punkt P należy do jej wykresu, to mamy także $3 = f(-2) = -2a + b$. Rozwiązujemy otrzymany układ równań i otrzymujemy $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{7}{3}$. Zatem szukany wzór ma postać $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

Zadanie 25. (0-2)

Napisz równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $y = 2x - 11$ i przechodzącej przez punkt $P = (1, 2)$.

Rozwiązanie
Wszystkie proste równoległe do danej prostej mają taki sam współczynnik kierunkowy.

Szukamy zatem prostej o równaniu postaci $y = 2x + b$. Ponieważ szukana prosta przechodzi przez punkt $P = (1, 2)$, otrzymujemy $2 = 2 \cdot 1 + b$, skąd $b = 0$. Zatem prosta ta ma równanie $y = 2x$.

Zadanie 26. (0-2)

Wyznacz równanie prostej zawierającej środkową CD trójkąta ABC, którego wierzchołkami są punkty: $A = (-2, -1)$, $B = (6,1)$, $C = (7,10)$.

Rozwiązanie

Wiemy, że szukana prosta przechodzi przez punkt $C = (7,10)$ oraz przez punkt D, będący środkiem boku AB. Zatem korzystając ze wzoru na współrzędne środka odcinka mamy $D = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = (2,0)$. Ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty otrzymujemy: $(y-10)(2-7)-(0-10)(x-7)=0$, a stąd $-5y+10x-20=0$, czyli $-y+2x-4=0$.

Zadanie 27. (0-2)

W trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątne mają długości 2 i 4, jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Rozwiązanie

Niech α będzie kątem leżącym naprzeciwko boku o długości 2, zaś β – kątem leżącym naprzeciwko boku o długości 4. Zauważmy, że $\sin\alpha = \cos\beta$ oraz $\cos\alpha = \sin\beta$, więc mamy $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos\beta$, czyli szukana wartość nie zależy od wyboru kąta.

Przeciwprostokątna w danym trójkącie ma długość $\sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$. Z definicji funkcji trygonometrycznych otrzymujemy $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{20}} \cdot \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Zadanie 28. (0-2)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz $3 + 2\,\mathrm{tg}^2\alpha$.

Rozwiązanie

Mamy $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, więc $\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{15}$.

Zatem $3 + 2\,\mathrm{tg}^2\alpha = 3 + \frac{2}{15} = \frac{47}{15}$.

Zadanie 29. (0-2)

Ile wyrazów ujemnych ma ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla $n \geq 1$?

Rozwiązanie
Szukamy liczb naturalnych $n \geq 1$ spełniających nierówność $n^2 - 2n - 24 < 0$.
Zapiszmy tę nierówność w postaci $n^2 - 2n + 1 - 25 < 0$, $(n-1)^2 - 5^2 < 0$, skąd $(n-1-5)(n-1+5) < 0$, $(n-6)(n+4) < 0$. Ponieważ $n+4 > 0$, otrzymujemy $n < 6$. Zatem liczba n może przyjmować jedną z pięciu wartości: 1, 2, 3, 4, 5, czyli ciąg ma pięć wyrazów ujemnych.

Zadanie 30. (0-2)

Liczby 2, $x-3$, 8 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

Rozwiązanie
Mamy $a_1 = 2$ oraz $a_2 = x-3$, zatem różnica ciągu wynosi $r = (x-3) - 2 = x - 5$. Ponadto $8 = a_4 = a_1 + 3r = 2 + 3(x-5)$, skąd $6 = 3(x-5)$ i w końcu $x = 7$.

Zadanie 31. (0-2)

Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15}.

Rozwiązanie
Ponieważ dokładnie co piąta liczba naturalna daje z dzielenia przez 5 resztę 2, to różnica danego ciągu arytmetycznego wynosi 5. Wobec tego $12 = a_3 = a_1 + 2r = a_1 + 10$, skąd $a_1 = 2$. Wobec tego $a_{15} = a_1 + 14r = 2 + 14 \cdot 5 = 72$.

Zadanie 32. (0-2)

Dany jest prostokąt o bokach a i b. Zmniejszamy długość boku a o 10% oraz zwiększamy długość boku b o 20%. Wyznacz stosunek $\frac{a}{b}$, jeśli wiadomo, że otrzymany prostokąt ma taki sam obwód jak prostokąt wyjściowy.

Rozwiązanie
Otrzymany prostokąt ma boki długości $0,9a$ oraz $1,2b$. Z porównania obwodów obu prostokątów otrzymujemy związek $2 \cdot 0,9a + 2 \cdot 1,2b = 2a + 2b$, skąd $0,4b = 0,2a$. Wobec tego $\frac{a}{b} = \frac{0,4}{0,2} = 2$.

Zadanie 33. (0-2)

Udowodnij, że jeśli x, y są liczbami rzeczywistymi, to $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnych liczb x, y mamy $(x-y)^2 \geq 0$, skąd $x^2 + y^2 \geq 2xy$, co kończy dowód.

Zadanie 34. (0-2)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania iloczynu liczby oczek równego 5.

Rozwiązanie

Zdarzeniami elementarnymi są pary liczb całkowitych (a,b), gdzie $1 \leq a,b \leq 6$ – mamy 36 takich par. Zdarzenia elementarne sprzyjające to pary $(1,5)$ oraz $(5,1)$. Zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Zadanie 35. (0-4)

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = 4, a_6 = 19$. Ile wyrazów tego ciągu należy do przedziału $(0, 200)$?

Rozwiązanie

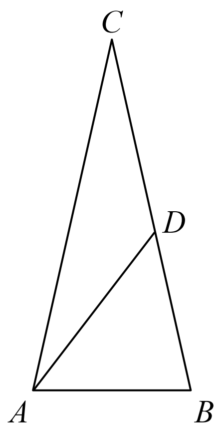
Mamy $4 = a_1 + 2r$, $19 = a_1 + 5r$. Stąd $3r = 15, r = 5$ oraz $a_1 = -6$. Pytamy, dla jakich n mamy $0 < a_n < 200$, czyli $0 < -6 + (n-1) \cdot 5 < 200$.

Stąd $6 < 5(n-1) < 206$, $\frac{6}{5} < n - 1 < \frac{206}{5}$, $\frac{11}{5} < n < \frac{211}{5}$.

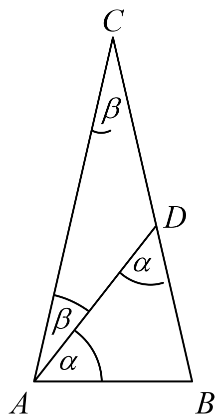
Pierwszą nierówność spełniają liczby $n \geq 3$, a drugą liczby $n \leq 42$. Zatem liczb naturalnych spełniających obydwa warunki mamy 40 i tyle też wyrazów ciągu leży w przedziale $(0,200)$.

Zadanie 36. (0-4)

Punkt D leży na boku BC trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Odcinek AD dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, że $|AD| = |CD|$ oraz $|AB| = |BD|$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $| \ ADC| = 5 \cdot | \ ACD|$.



Rozwiązanie I



Niech $\alpha = | \; BAD|$ i $\beta = | \; ACD|$. Trójkąty ABD, ACD i ABC są równoramienne, więc

$$| \; DAB| = | \; BAD| = \alpha, \quad | \; CAD| = | \; ACD| = \beta$$

$$\text{oraz } | \; CAB| = | \; CBA| = \alpha + \beta .$$

Suma miar kątów trójkąta ACD jest równa 180°, więc

$$| \; ADC| = 180° - 2\beta .$$

Z drugiej strony $| \; ADC| = 180° - | \; ADB|$, czyli $180° - 2\beta = 180° - \alpha$. Stąd $\alpha = 2\beta$.

Suma miar kątów trójkąta ABC jest równa 180°, więc $2(\alpha + \beta) + \beta = 180°$, czyli $2(2\beta + \beta) + \beta = 180°$. Stąd $7\beta = 180°$.

Zatem $| \; ADC| = 180° - 2\beta = 7\beta - 2\beta = 5\beta = 5 \cdot | \; ACD|$. To kończy dowód.

Rozwiązanie II

Oznaczmy kąty α i β jak w poprzednim rozwiązaniu.

Ponieważ kąt ADB jest kątem zewnętrznym trójkąta ADC, więc $\alpha = 2\beta$.

Również kąt ADC jest kątem zewnętrznym trójkąta ABD, więc

$| \; ADC| = \alpha + \alpha + \beta = 2\alpha + \beta = 4\beta + \beta = 5\beta = 5| \; ACD|$, co kończy dowód.

Zadanie 37. (0-2)

Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu a jego płaszczyzną podstawy.
Rozwiązanie
Rozważmy trójkąt prostokątny ABC utworzony przez przekątną AB sześcianu, przekątną AC podstawy sześcianu oraz krawędź BC. Kąt ostry α tego trójkąta jest kątem między przekątną sześcianu i płaszczyzną jego podstawy. Długość przekątnej sześcianu o krawędzi długości a jest równa $a\sqrt{3}$, więc sinus kąta α jest równy

$$\sin\alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Zadanie 38. (0-4)

W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem ⍰ takim, że $\sin\alpha = 0,2$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

Rozwiązanie I
Przyjmijmy oznaczenia:
BD - przekątna podstawy
$|DH| = h$ - krawędź boczna
$|BH| = d$ - przekątna graniastosłupa
$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$
Trójkąt BDH jest prostokątny, więc

$$\sin\alpha = \frac{h}{d}, \text{ czyli } \frac{1}{5} = \frac{h}{d}. \text{ Stąd } h = \frac{1}{5}d.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BDH otrzymujemy

$$|BD|^2 = d^2 - h^2 = d^2 - \left(\frac{1}{5}d\right)^2 = \frac{24}{25}d^2.$$

Pole podstawy graniastosłupa jest więc równe

$$P_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot|BD|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{24}{25}d^2 = \frac{12}{25}d^2.$$

Zatem objętość tego graniastosłupa jest równa

$$V = P_{ABCD}\cdot h = \frac{12}{25}d^2\cdot\frac{1}{5}d = \frac{12}{125}d^3.$$

Rozwiązanie II
Przyjmijmy oznaczenia jak w rozwiązaniu I.
Trójkąt BDH jest prostokątny, więc $\sin\alpha = \frac{h}{d}$, czyli $h = d\sin\alpha$. Stąd $h = 0,2\,d$.

W trójkącie BDH mamy również $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{d}$, czyli $a\sqrt{2} = d\cos\alpha = d\sqrt{1-(0,2)^2} = \sqrt{0,96}\,d$.

Stąd $V = a^2h = \frac{1}{2}\cdot 0,96d^2\cdot 0,2d = 0,096d^3$.

Zadanie 39. (0-4)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste.
Uwaga: przypominamy, że zero jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie
Mamy do dyspozycji 5 cyfr parzystych: 0, 2, 4, 6, 8 oraz 5 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9. Musimy jednak pamiętać, że 0 nie może być pierwszą cyfrą zapisu dziesiętnego liczby. Dlatego rozważymy dwa przypadki: a) gdy pierwsza cyfra jest nieparzysta oraz b) gdy pierwsza cyfra jest parzysta.
W przypadku a) pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów; każda pozostała cyfra musi być parzysta i każdą z nich też możemy wybrać na 5 sposobów. Zatem w przypadku a) mamy 5^4 możliwości.
W przypadku b) cyfrę parzystą, stojącą na pierwszym miejscu, możemy wybrać na 4 sposoby.
Na pozostałych miejscach mamy rozmieścić jedną cyfrę nieparzystą oraz dwie cyfry parzyste. Miejsce dla cyfry nieparzystej możemy wybrać na 3 sposoby; na pozostałych dwóch miejscach umieścimy cyfry parzyste. Cyfrę na każdym z tych trzech miejsc można wybrać na 5 sposobów. Zatem w przypadku b) mamy $4 \cdot 3 \cdot 5^3 = 12 \cdot 5^3$ możliwości.
W obu przypadkach łącznie otrzymujemy $5^4 + 12 \cdot 5^3 = (5+12) \cdot 5^3 = 17 \cdot 125 = 2125$ liczb spełniających warunki zadania.

Zadanie 40. (0-4)

Z pojemnika, w którym jest pięć losów: dwa wygrywające i trzy puste, losujemy dwa razy po jednym losie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy co najmniej jeden los wygrywający. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie I (model klasyczny)
Oznaczmy przez w_1, w_2 losy wygrywające, a przez p_1, p_2, p_3 losy puste. Wszystkie wyniki losowania dwóch losów bez zwracania możemy przedstawić w tabeli: wynik pierwszego losowania wyznacza wiersz, a wynik drugiego losowania - kolumnę, w przecięciu których leży pole, odpowiadające tej parze losowań. Pola położone na przekątnej odrzucamy, gdyż odpowiadałyby one wylosowaniu dwukrotnie tego samego losu, a to jest niemożliwe, gdyż losujemy bez zwracania.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch losów, wśród których co najmniej jeden jest wygrywający. Zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A zaznaczamy w tabeli krzyżykiem (x).

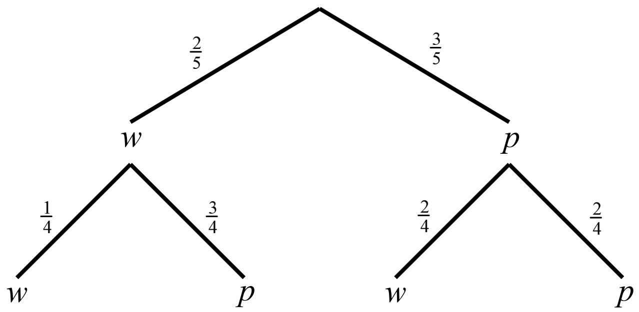
	w_1	w_2	p_1	p_2	p_3
w_1		x	x	x	x
w_2	x		x	x	x
p_1	x	x			
p_2	x	x			
p_3	x	x			

Mamy więc 20 wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli $|\Omega| = 20$, oraz 14 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, czyli $|A| = 14$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest zatem równe $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.

Rozwiązanie II (metoda drzewa)

Losowanie z pojemnika kolejno dwóch losów bez zwracania możemy zilustrować za pomocą drzewa, gdzie w oznacza wylosowanie losu wygrywającego, a p - losu pustego. Pogrubione gałęzie drzewa odpowiadają zdarzeniu A polegającemu na wylosowaniu dwóch losów, wśród których co najmniej jeden jest wygrywający. Na odcinkach drzewa zostały zapisane odpowiednie prawdopodobieństwa.



Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{2+6+6}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}.$$

Zadanie 41. (0-3)

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1} + \sqrt{2^{50}-1} < 2^{26}$.

Rozwiązanie I

Dla dowodu przekształcimy w sposób równoważny tezę.

Ponieważ obie strony danej nierówności $\sqrt{2^{50}+1} + \sqrt{2^{50}-1} < 2^{26}$ są dodatnie, możemy je podnieść do kwadratu. Otrzymujemy kolejno:

$$\left(\sqrt{2^{50}+1} + \sqrt{2^{50}-1}\right)^2 < \left(2^{26}\right)^2$$

$$2^{50} + 1 + 2\cdot\sqrt{2^{50}+1}\cdot\sqrt{2^{50}-1} + 2^{50} - 1 < 2^{52}$$

$$2\cdot 2^{50} + 2\sqrt{\left(2^{50}-1\right)\left(2^{50}+1\right)} < 2^{52}$$

$$2\sqrt{2^{100}-1} < 2^{52} - 2^{51}$$

$$\sqrt{2^{100}-1} < 2^{50}.$$

Obie strony tej nierówności są także dodatnie, więc podnosząc je do kwadratu otrzymujemy

$$2^{100} - 1 < 2^{100}.$$

Otrzymana nierówność jest oczywiście prawdziwa, a zatem dana w zadaniu nierówność jest również prawdziwa, co kończy dowód.

Rozwiązanie II

Oznaczmy $a=\sqrt{2^{50}+1}$, $b=\sqrt{2^{50}-1}$. Zauważmy, że dla dowolnych liczb a, b, takich, że $a \neq b$, mamy $(a-b)^2>0$, skąd $a^2+b^2>2ab$. Wobec tego

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab<a^2+b^2+a^2+b^2=2\left(a^2+b^2\right)=2\left(2^{50}+1+2^{50}-1\right)=2^{52}$.

Stąd $a+b<\sqrt{2^{52}}=2^{26}$, co kończy dowód.

Zadanie 42. (0-5)

W roku 2015 na uroczystości urodzinowej ktoś spytał jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: jeżeli swój wiek sprzed 27 lat pomnożę przez swój wiek za 15 lat, to otrzymam rok swojego urodzenia. Oblicz, ile lat ma ten jubilat.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x obecny wiek jubilata (w latach). Wówczas wiek jubilata sprzed 27 lat jest równy x-27, wiek, jaki będzie miał za 15 lat, jest równy x+15, a rok jego urodzenia to 2015-x.

Mamy więc równanie $(x-27)(x+15)=2015-x$.

Po uporządkowaniu otrzymujemy $x^2-11x-2420=0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby x=55, $x=-44$.

Stąd wiemy, że jubilat w roku 2015 obchodzi 55. urodziny.