EGZAMIN MATURALNY
MATEMATYKA
Poziom rozszerzony
ZBIÓR ZADAŃ

Materiały pomocnicze dla uczniów i nauczycieli

Centralna Komisja Egzaminacyjna
2015

Publikacja opracowana przez zespół koordynowany przez **Renatę Świrko** działający w ramach projektu *Budowa banków zadań* realizowanego przez Centralną Komisję Egzaminacyjną pod kierunkiem Janiny Grzegorek.

Autorzy
Barbara Andrzejewska (kierownik zespołu przedmiotowego)
Agnieszka Borowska
dr Wiktor Bartol (kierownik zespołu przedmiotowego)
Jacek Człapiński (kierownik zespołu przedmiotowego)
Henryk Dąbrowski
dr Jacek Dymel
Anna Kleinschmidt
Marzena Mazur
dr Edward Stachowski

Komentatorzy
dr Waldemar Pałuba
Andrzej Daszke
Hanna Schulte-Noelle

Opracowanie redakcyjne
Jakub Pochrybniak

Redaktor naczelny
Julia Konkołowicz-Pniewska

Zbiory zadań opracowano w ramach projektu *Budowa banków zadań*,
Działanie 3.2 Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych,
Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty,
Program Operacyjny Kapitał Ludzki

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Spis treści

Wprowadzenie

Prezentowany zbiór zadań jest przeznaczony przede wszystkim dla osób zamierzających zdawać egzamin maturalny z matematyki w formule obowiązującej od 2015 roku. Zbiór ten może być również wykorzystywany przez nauczycieli matematyki w procesie dydaktycznym jako materiał uzupełniający, ponieważ zawiera wiele zadań w nowym stylu, o interesującej, zmuszającej do myślenia treści; także takie, których nauczyciele nie znajdą w obecnych na rynku publikacjach.

Zbiór obejmuje 100 zadań sprawdzających opanowanie kompetencji matematycznych opisanych w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla poziomu rozszerzonego.

Zadania zostały pogrupowane tematycznie, zgodnie z następującą klasyfikacją:

1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności;
2. Funkcje;
3. Ciągi;
4. Geometria (planimetria, stereometria, geometria analityczna płaszczyzny; trygonometria);
5. Prawdopodobieństwo i kombinatoryka (wraz z elementami statystyki);
6. Rachunek różniczkowy.

Właśnie na tym poziomie warto zwrócić szczególną uwagę na zadania dotyczące treści, które zgodnie z nową podstawą programową nauczania matematyki pojawiły się w 2015 roku na egzaminie maturalnym po kilkuletniej przerwie (np. zastosowanie granic, pochodnych, szereg geometryczny, prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite).

Zgodnie z wymaganiami maturalnymi w zbiorze znajdują się zarówno zadania zamknięte, w których tylko jedna z podanych odpowiedzi jest prawdziwa, jak i zadania otwarte, wymagające przedstawienia pełnego rozwiązania, w tym zadania na dowodzenie.

Uczeń samodzielnie przygotowujący się do egzaminu maturalnego, który nie będzie miał pomysłu na rozwiązanie zadania, może liczyć na pomoc w postaci wskazówek oraz komentarzy towarzyszących każdemu zadaniu, podpowiadających kolejne etapy rozwiązania i uzasadniających przyjętą strategię. Do wszystkich zadań zamkniętych podano prawidłowe odpowiedzi, co pozwoli uczniowi sprawdzić poprawność ich rozwiązania. Do zadań otwartych przedstawiono pełne rozwiązania, niekiedy na kilka sposobów. Tym samym uczeń bez pomocy nauczyciela, podążając za wskazówkami i śledząc poszczególne etapy rozwiązania, będzie w stanie pokonać zasadnicze trudności zadania lub w pełni je rozwiązać.

Ponadto do każdego zadania podano wymagania egzaminacyjne ogólne i szczegółowe z obecnie obowiązującej *Podstawy programowej* dla III (gimnazjum) i IV (szkoła ponadgimnazjalna) etapu kształcenia.

Mamy nadzieję, że proponowany zbiór zadań będzie pomocny uczniom w przygotowaniu się do egzaminu maturalnego z matematyki, a nauczycielom pozwoli wzbogacić proces nauczania o ciekawe zadania i ułatwi im realizację najważniejszego celu kształcenia matematycznego: uczeń kończący kolejny etap edukacyjny będzie znał i rozumiał pojęcia matematyczne, ale przede wszystkim będzie umiał stosować wiedzę teoretyczną w rozwiązywaniu problemów, również w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

Autorzy

1. Zadania

1.1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności

Zadanie 1.

Dane jest równanie kwadratowe $x^2 + kx + 2k - 3 = 0$, gdzie $k \in R$. Dla jakich wartości parametru k to równanie ma dwa różne pierwiastki ujemne?

Komentarz do zadania

Kiedy równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki? Co powiesz o znaku sumy i iloczynu pierwiastków, jeśli są one ujemne? Możesz skorzystać ze wzorów Viète'a. Rozwiąż otrzymane nierówności. Wyznacz część wspólną zbiorów rozwiązań.

Przykładowe rozwiązanie

Niech liczby x_1 i x_2 będą rozwiązaniami równania kwadratowego $x^2 + kx + 2k - 3 = 0$.

Ustalimy, dla jakich wartości parametru k równanie ma dwa rozwiązania, które są liczbami ujemnymi.

Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania, gdy $k^2 - 4(2k-3) > 0$.

$$k^2 - 4(2k-3) > 0,$$

$$k^2 - 8k + 12 > 0,$$

$$k_1 = \frac{8-4}{2} = 2, \quad k_2 = \frac{8+4}{2} = 6,$$

$$k \in (-\infty;\, 2) \cup (6;\infty).$$

Wyznaczymy teraz, dla jakich wartości k rozwiązania równania x_1 i x_2 są ujemne.

Wiemy, że x_1 i x_2 będą ujemne, gdy

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$$

Korzystając ze wzorów Viète'a, mamy

$$\begin{cases} 2k - 3 > 0 \\ -k < 0 \end{cases}$$

Tak więc $k > 1\frac{1}{2}$ i $k > 0$.

Z powyższego mamy $k \in \left(1\frac{1}{2};\infty\right)$.

Rozważane równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania ujemne dla k spełniających następujące warunki:

$$k \in (-\infty; 2) \cup (6; \infty) \quad \text{i} \quad k \in \left(1\frac{1}{2}; \infty\right).$$

Tak więc równanie ma dwa różne rozwiązania ujemne dla

$$k \in \left(1\frac{1}{2}; 2\right) \cup (6; \infty).$$

Zadanie 2.

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $x-2$ jest równa 2. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x-1)$ przez $x-3$.

Komentarz do zadania

Nazwa zmiennej nie ma znaczenia; możesz myśleć o dzieleniu $W(t)$ przez $t-2$ zamiast $W(x)$ przez $x-2$. Co otrzymasz, podstawiając teraz $x-1$ zamiast t?

Jeśli jeszcze tego nie widzisz, prześledź krok po kroku następujące rozumowanie: Gdy dzielisz np. liczbę 17 przez 5, to otrzymujesz iloraz 3 i resztę 2. Możesz więc napisać, że $17 = 3 \cdot 5 + 2$. Podobne zasady dotyczą dzielenia wielomianów. Zapisz wielomian W w postaci sumy iloczynu dzielnika $x-2$ przez iloraz oraz reszty. Nie musisz znać otrzymanego ilorazu — zamiast tego napisz np. $P(x)$. W zadaniu jest mowa o wartości wielomianu W dla argumentu $x-1$, pozostaje więc w miejsce zmiennej, w zapisanej wcześniej sumie, wstawić $x-1$.

Przykładowe rozwiązanie

Zauważmy, że istnieje taki wielomian $P(x)$, że $W(x) = (x-2) \cdot P(x) + 2$.

Ale wówczas $W(x-1) = [(x-1)-2] \cdot P(x-1) + 2$, czyli $W(x-1) = (x-3) \cdot P(x-1) + 2$.

Stąd widać, że szukana reszta jest równa 2.

Zadanie 3.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y takich, że $|x| \neq |y|$, prawdziwa jest nierówność $\dfrac{(x-y)(x^3+y^3)}{(x+y)(x^3-y^3)} > \dfrac{1}{3}$.

Komentarz do zadania

Skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia na sumę sześcianów i na różnicę sześcianów i skróć ułamek występujący po lewej stronie dowodzonej nierówności.

Przekształć teraz otrzymaną nierówność tak, żeby otrzymać nierówność kwadratową.

Skorzystaj na koniec ze wzoru na kwadrat różnicy i wyciągnij odpowiedni wniosek. W którym miejscu wykorzystasz informację, że liczby x i y są różne?

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których pierwiastkami równania $(x^2-1)(x^2-m^2)=0$ są cztery kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego.

Komentarz do zadania

Czy dla $m=0$ warunki zadania byłyby spełnione? Ile wówczas mielibyśmy rozwiązań?

Zauważ, że rozwiązaniami każdego z równań $x^2-1=0$ oraz $x^2-m^2=0$ są pary liczb przeciwnych. Jakie to liczby? Jakie może być wzajemne położenie tych liczb na osi liczbowej? Dlaczego nie jest możliwe wzajemne położenie opisane nierównościami $-m<-1<m<1$?

Jak możesz skorzystać z definicji ciągu arytmetycznego dla ciągu $(m,-1,1,m)$, a jak dla ciągu $(-1,-m,m,1)$?

Zauważ, że jeśli rozwiązaniem zadania będzie liczba *m*, to będzie nią także liczba $-m$, bowiem w równaniu mamy wyrażenie m^2, a $m^2=(-m)^2$.

Zadanie 5.

Liczba $\log_4 9+\log_2 6$ jest równa

A. $\log_2 18$ B. $\log_2 27$ C. $\log_4 27$ D. $\log_4 108$

Zadanie 6.

Wykaż, że $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2=1$.

Zadanie 7.

Liczba $(2^7)^{\log_2 7}$ jest równa

A. 7^1 B. 7^2 C. 7^7 D. 7^{14}

Zadanie 8.

Iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest 6 razy większy od kwadratu najmniejszej z tych liczb powiększonego o 1. Wyznacz te liczby.

Zadanie 9.

Liczby rzeczywiste *a, b, c* są pierwiastkami wielomianu x^3-2x+1. Oblicz, ile jest równe $a^2+b^2+c^2$.

Zadanie 10.

Wyznacz wszystkie wartości parametru *k*, dla których równanie $k^2x-1=x(3k-2)-k$ ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 11.

Równanie $||x+3|-4|=5$

A. nie ma rozwiązań rzeczywistych.
B. ma dokładnie dwa rozwiązania rzeczywiste.
C. ma dokładnie trzy rozwiązania rzeczywiste.
D. ma dokładnie cztery rozwiązania rzeczywiste.

Zadanie 12.

Rozwiąż równanie $||x-1|-1|=|x-2|$.

Zadanie 13.

Rozwiąż nierówność $|2x-2|-|x|\geq x$.

Zadanie 14.

Uzasadnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $|x+5|+|x-2|\geq 7$.

Zadanie 15.

Rozwiązaniami nierówności $|x^2-4|<|x-2|$ są wszystkie liczby ze zbioru

A. $(-2, 2)$
B. $(-3, -1)$
C. $(-\infty, -2)\cup(2, +\infty)$
D. $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$

Zadanie 16.

Równanie kwadratowe $5x^2+4x-3=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste: x_1 oraz x_2. Wartość wyrażenia $\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$ jest równa

A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{4}$

Zadanie 17.

Równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$, gdzie $c\neq 0$, ma dwa różne pierwiastki, których suma jest równa ich podwojonemu iloczynowi. Wynika stąd, że

A. $b=2c$ B. $c=2b$ C. $b=-2c$ D. $2b=-c$

Zadanie 18.

Określ liczbę rozwiązań równania $mx^2+mx-1-2m=0$, gdzie $x\in\langle -2,2\rangle$, w zależności od wartości parametru $m\in R$.

Zadanie 19.

Funkcja f, której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, określona jest wzorem $f(x)=(m-1)x^2-2x-m+1$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wykres funkcji f przecina się z prostą o równaniu $y=-x+1$ w dwóch punktach, których pierwsze współrzędne mają przeciwne znaki.

Zadanie 20.

Trójmian x^2+bx+c ma dwa różne pierwiastki całkowite, oba różne od zera, a suma jego współczynników $1+b+c$ jest liczbą pierwszą. Wskaż przykład trójmianu spełniającego warunki zadania. Uzasadnij, że jednym z pierwiastków tego trójmianu jest liczba 2.

Zadanie 21.

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność $8x^2-4mx+2m^2\geq 12x+6m-18$.

Zadanie 22.

Wielomian *f* jest dany wzorem $f(x)=x^4+x^3-2x^2+3x-a$. Reszta z dzielenia wielomianu *f* przez dwumian $x-2$ jest równa 3, gdy *a* jest równe

A. 12 B. 17 C. 19 D. 22

Zadanie 23.

Dla pewnej wartości parametru m reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=8x^8+6x^6+4x^4+2x^2+m$ przez $x-2$ jest równa 2014. Reszta z dzielenia wielomianu *W* przez $2x+4$ jest równa

A. -2014 B. -1007 C. 2014 D. 4028

Zadanie 24.

Wielomian $W(x)=4x^5+ax^3+bx^2+1$ jest podzielny przez dwumian $2x+1$, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x-2$ jest równa 105. Wyznacz pierwiastki wielomianu W.

Zadanie 25.

Rozwiąż równanie $3\left(x+\sqrt{2}\right)=x^3+2\sqrt{2}$.

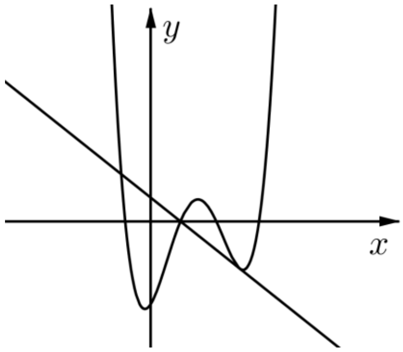
Wskazówka: możesz skorzystać ze wzoru $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$.

Zadanie 26.

Rozwiąż równanie $\left(x^2-3x\right)\left(x^2-3x+2\right)+1=0$.

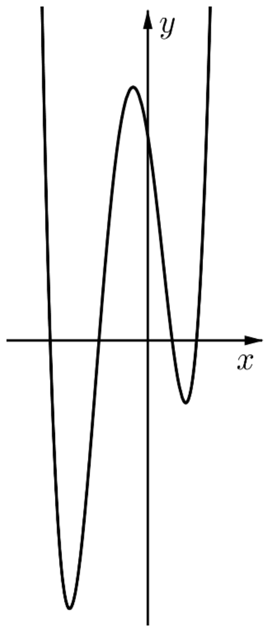
Zadanie 27.

Na rysunku poniżej przedstawiono fragment wykresu funkcji liniowej $f(x)=-2x+2$ oraz fragment wykresu wielomianu $w(x)=x^4-6x^3+8x^2+4x-7$. Rozwiąż nierówność $w(x)\geq f(x)$.



Zadanie 28.

Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu wielomianu $W(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^3-4x^2-6x+8$. Wielomian W jest podzielny przez dwumian $\frac{1}{2}x+2$. Rozwiąż nierówność $W(x+2)\geq 0$.



Zadanie 29.

Dane są funkcje $f(k)=k^3$ oraz $g(k)=2\cdot f(k)-f(k-2)$, gdzie $k\in R$. Wyznacz wartości k, dla których $g(k)=80$.

Zadanie 30.

Funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2+bx-6$ osiąga najmniejszą wartość równą -22 dla argumentu 4. Liczba -3 jest jednym z rozwiązań równania $x^3+ax^2+bx-6=0$. Wyznacz pozostałe rozwiązania tego równania.

1.2. Funkcje

Zadanie 31.

Funkcja kwadratowa $f(x) = -x^2 + (1-m)x + m + 3$ osiąga wartość największą dla tego samego argumentu, dla którego wartość najmniejszą osiąga funkcja kwadratowa $g(x) = -(m+1)x^2 + (2m-2)x - 4m$. Uzasadnij, że dla dowolnej wartości argumentu prawdziwa jest nierówność $f(x) \le g(x)$.

Komentarz do zadania

Dla jakiej wartości argumentu funkcja kwadratowa osiąga wartość najmniejszą (największą)? Wyznacz te wartości dla każdej z funkcji i przyrównaj do siebie otrzymane wyrażenia. Sprawdź, czy dla każdej z otrzymanych wartości parametru spełnione są warunki zadania. Uwzględniając wyznaczone *m*, napisz wzory obu funkcji w postaci kanonicznej lub rozwiąż odpowiednią nierówność.

Przykładowe rozwiązanie

Niech punkt $W_f = (x_f, y_f)$ będzie wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej *f*. Wtedy $x_f = \frac{1-m}{2}$.

Analogicznie, niech punkt $W_g = (x_g, y_g)$ będzie wierzchołkiem paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej *g*. Wtedy $x_g = \frac{2(m-1)}{2(m+1)} = \frac{m-1}{m+1}$. Oczywiście, ponieważ funkcja g jest kwadratowa, musi zachodzić warunek $m \ne -1$.

Z warunków zadania wynika, że $x_g = x_f$, zatem $\frac{1-m}{2} = \frac{m-1}{m+1}$.

Ostatnie równanie można zapisać w postaci równoważnej $1 - m^2 = 2(m-1)$, czyli

$$(m-1)(m+3) = 0.$$

Jego rozwiązaniami są liczby 1 oraz -3.

Zauważmy, że dla $m = 1$ funkcja *g* byłaby określona wzorem $g(x) = -2x^2 - 4$, tym samym nie miałaby wartości najmniejszej.

Z kolei dla $m = -3$ otrzymujemy:

$$f(x) = -x^2 + 4x,$$

$$g(x) = 2x^2 - 8x + 12.$$

Zapisując otrzymane trójmiany w postaci kanonicznej, otrzymujemy:

$$f(x) = -(x-2)^2 + 4,$$

$$g(x) = 2(x-2)^2 + 4.$$

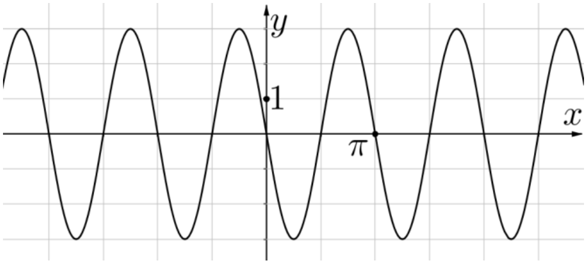
Stąd $f(x) \le g(x)$ dla każdej wartości x.

Uwaga: Oczywiście $g(x) - f(x) = 3 \cdot (x-2)^2 \ge 0$, co oznacza, że $g(x) \ge f(x)$.

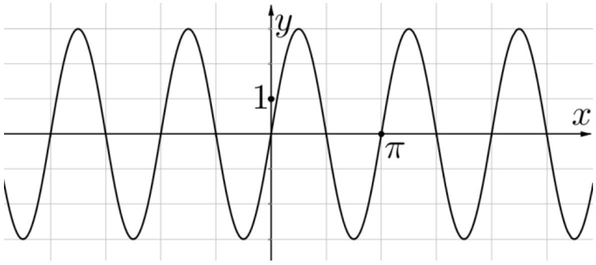
Zadanie 32.

Funkcja f, której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, jest określona wzorem $f(x) = 2\sin(-3x)$. Na którym rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f?

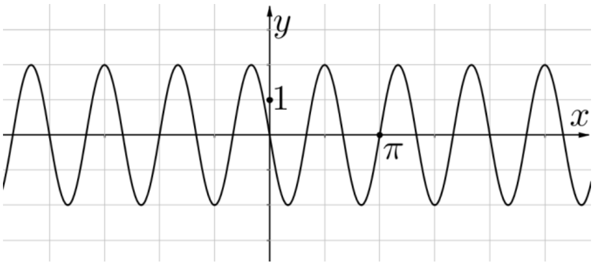
A.



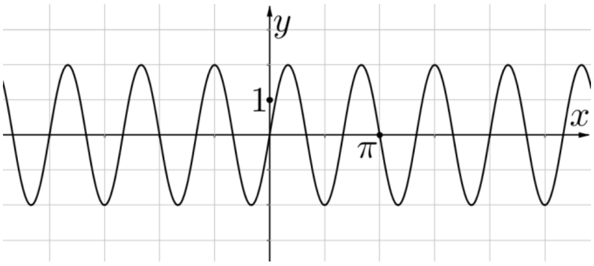
B.



C.



D.



Komentarz do zadania

Zauważ, że zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\langle -2; 2\rangle$. Które z przedstawionych fragmentów wykresów funkcji możesz odrzucić? Następnie sprawdź, jakie wartości (dodatnie czy ujemne) funkcja f przyjmuje w otoczeniu zera.

Możesz też obliczyć wartość $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 2$. Na którym rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji spełniającej ten warunek?

Poprawna odpowiedź

C

Zadanie 33.

Wyznacz, w zależności od całkowitych wartości parametru $a > 0$, liczbę różnych rozwiązań równania $\sin(\pi a x) = 1$ w przedziale $\left\langle 0, \frac{1}{a}\right\rangle$.

Komentarz do zadania

Najpierw musisz ustalić, dla jakich wartości argumentu α prawdziwe jest równanie $\sin\alpha = 1$. Pamiętaj o okresowości funkcji sinus — musisz zapisać cała serię rozwiązań, z uwzględnieniem krotności okresu, czyli wyrażenia $2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Teraz podstaw w miejsce α argument równania, które chcesz rozwiązać, czyli $\pi a x$, a następnie, odpowiednio dzieląc, wyznacz zmienną x.

Sprawdź, że dla $k = 0$ otrzymana wartość zmiennej x leży w przedziale $\left\langle 0, \frac{1}{a} \right\rangle$.

Zauważ, że dla $k < 0$ otrzymana wartość zmiennej x jest ujemna, czyli nie może należeć do przedziału $\left\langle 0, \frac{1}{a} \right\rangle$. Podobnie dla $k > 0$ nie są spełnione warunki zadania.

Zadanie 34.

Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę x spełniającą warunki: $\sin x + \sin 3x = 0$ oraz $\cos\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}$.

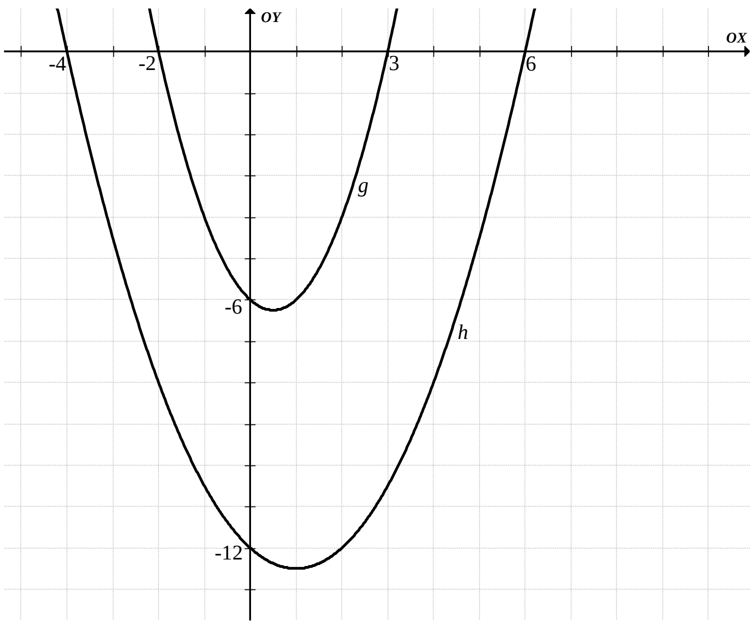
Komentarz do zadania

Korzystając ze wzoru na sumę sinusów, rozwiąż podane równanie (otrzymasz dwa prostsze równania). Wśród otrzymanych rozwiązań poszukaj najmniejszej liczby dodatniej. Sprawdź, czy spełnia ona podaną nierówność. Jeśli nie, zrób to samo z następnym dodatnim rozwiązaniem równania. Czynność tę powtarzaj tak długo, aż trafisz na liczbę, która spełnia również podaną nierówność.

Możesz też rozwiązać daną nierówność i sprawdzić, jaka najmniejsza liczba dodatnia spełniająca równanie należy do zbioru rozwiązań nierówności.

Zadanie 35.

Dla danej funkcji kwadratowej f określono funkcje g i h wzorami: $g(x) = k \cdot f(x)$ oraz $h(x) = f(kx)$, gdzie $k \neq 0$. Wyznacz wzór funkcji $f(x)$, mając dane wykresy funkcji g i h.



Zadanie 36.

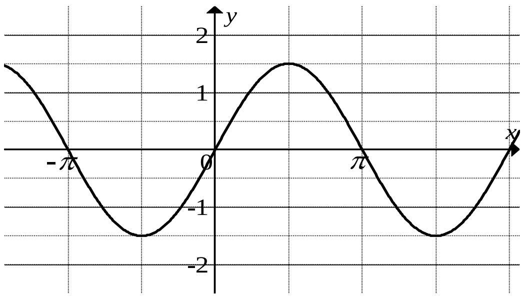
Wykaż, że

$$\frac{1 + 2\cos 88^\circ \cdot \cos 2^\circ}{\cos^2 2^\circ - \cos 88^\circ \cdot \sin 2^\circ} = \frac{1 + \operatorname{tg} 2^\circ}{1 - \operatorname{tg} 2^\circ}.$$

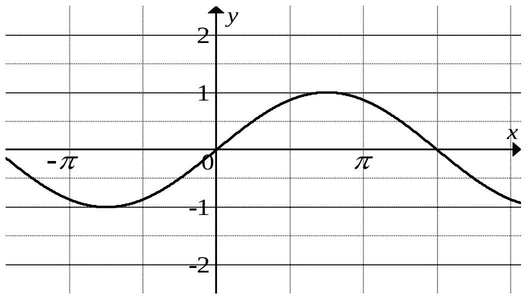
Zadanie 37.

Na którym z poniższych rysunków jest przedstawiony fragment wykresu funkcji f określonej dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$?

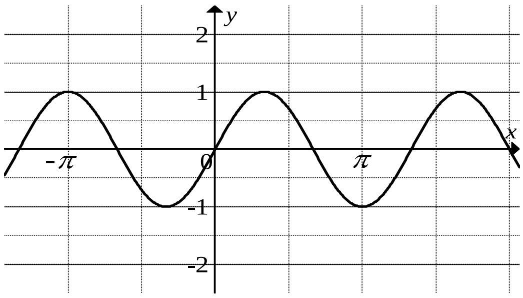
A.



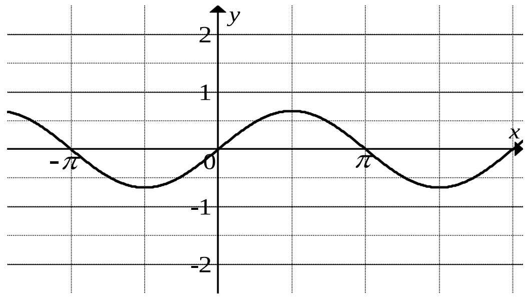
B.



C.



D.



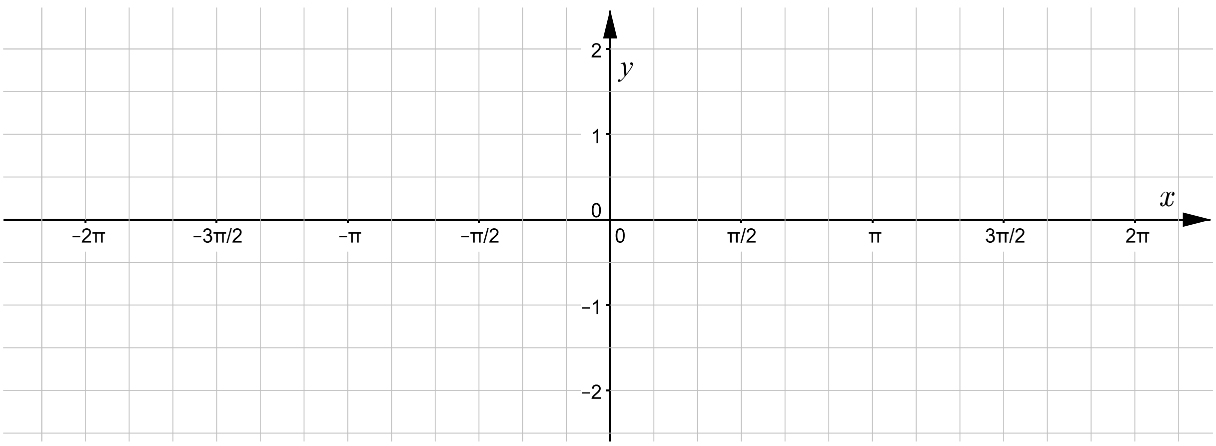
Zadanie 38.

Dane są liczby: $a=\sin\left(32\frac{1}{3}\cdot\pi\right)$, $b=\cos\left(32\frac{1}{3}\cdot\pi\right)$, $c=\mathrm{tg}\left(32\frac{1}{3}\cdot\pi\right)$. Wówczas

A. $a<b$ B. $a=b$ C. $b<c$ D. $b=c$

Zadanie 39.

Dana jest funkcja $f(x)=\cos x$ oraz funkcja $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)$. Rozwiąż graficznie i algebraicznie równanie $f(x)=g(x)$.



Zadanie 40.

Rozwiąż równanie $\sin 2x + 2\sin x + \cos x + 1 = 0$, dla $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Zadanie 41.

Wyznacz wszystkie wartości parametru $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$, dla których równanie $(x^2 - \sin 2\alpha)(x-1) = 0$ ma trzy rozwiązania.

Zadanie 42.

Rozwiąż nierówność $\cos 2x < \cos x$.

Zadanie 43.

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których równanie $(\cos x + a)\cdot(\sin^2 x - a) = 0$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dokładnie trzy różne rozwiązania.

1.3. Ciągi

Zadanie 44.

Funkcja f, której dziedziną jest zbiór $(1, +\infty)$, jest określona wzorem

$$f(x) = x + 1 + \frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x^2} + \frac{x+1}{x^3} + \dots .$$

Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 6.

Komentarz do zadania

Wyrażenie $x + 1 + \frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x^2} + \frac{x+1}{x^3} + \dots$ w podanym przedziale jest szeregiem geometrycznym zbieżnym. Skorzystaj z odpowiedniego wzoru, by zapisać jego sumę. Dla jakich x jest ona równa 6? Nie zapomnij sprawdzić, czy otrzymane liczby należą do dziedziny.

Przykładowe rozwiązanie

Dla $x \in (1; +\infty)$ wyrażenie $x + 1 + \frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x^2} + \frac{x+1}{x^3} + \dots$ jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{x}$ takim, że $|q| < 1$, zatem

$$x + 1 + \frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x^2} + \frac{x+1}{x^3} + \dots = \frac{x+1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x^2 + x}{x - 1}.$$

Z tego wynika, że $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$ dla $x \in (1; +\infty)$.

Wyznaczamy argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartość 6:

$$\frac{x^2+x}{x-1}=6,$$
$$x^2+x=6x-6,$$
$$x^2-5x+6=0,$$
$$x=2 \text{ lub } x=3.$$

Argumenty $x=2$ oraz $x=3$ należą do $(1;+\infty)$.

Funkcja f przyjmuje wartość 6 dla argumentów 2 i 3.

Zadanie 45.

Ciąg geometryczny (a_n) spełnia następujące równanie rekurencyjne: $a_1=7$, $a_{n+2}=\frac{1}{6}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$, dla $n\in\{1,2,3,...\}$. Wyznacz sumę wszystkich wyrazów ciągu (a_n).

Komentarz do zadania

Dany ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym. Napisz wzór ogólny na *n*-ty wyraz tego ciągu geometrycznego, zastosuj odpowiednio tę zależność w równaniu rekurencyjnym i przekształć to równanie do najprostszej postaci (czy iloraz q może być równy 0?). Rozwiąż równanie i wyznacz q. Pamiętając o sprawdzeniu warunku zbieżności szeregu geometrycznego, oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (dla obu przypadków).

Zadanie 46.

Ciągi (a_n) i (b_n) są dane następującymi wzorami: $a_n=\frac{n^2}{n+1}$, $b_n=\frac{3}{4n^2+2n}$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej *n*. Oblicz granicę ciągu (c_n) takiego, że $c_n=a_n\cdot b_n$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej *n*.

Komentarz do zadania

Zauważ, że ciąg (a_n) nie ma skończonej granicy (a ciąg (b_n) jest zbieżny do 0), nie możemy więc zastosować twierdzenia o granicy iloczynu. Znajdź ogólną postać wyrazów ciągu (c_n) i podziel licznik i mianownik przez odpowiednią potęgę *n*.

Zadanie 47.

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3n}{n^2+2}-\frac{n^2+7n}{n+21}\right)$.

Zadanie 48.

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-n^2}{n^2+1}-\frac{n^2}{n+3}\right)$.

Zadanie 49.

Pierwszy wyraz a_1 nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $\sqrt{2}$, natomiast suma pierwszych trzech jego wyrazów jest równa $\frac{7}{4}\sqrt{2}$. Szereg nieskończony $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ jest zbieżny. Oblicz jego sumę.

Zadanie 50.

Dany jest nieskończony ciąg sześcianów. Krawędź pierwszego z nich jest równa x_1. Krawędź drugiego z tych sześcianów ma długość x_2 równą różnicy długości przekątnej pierwszego sześcianu i przekątnej ściany pierwszego sześcianu. Analogicznie trzeci sześcian ma krawędź x_3 o długości równej różnicy długości przekątnej drugiego sześcianu i przekątnej ściany drugiego sześcianu, itd. Oblicz sumę $x_1 + x_2 + x_3 + ...$.

1.4. Geometria

Zadanie 51.

Trójkąt o boku a i kącie ostrym α, leżącym naprzeciw tego boku, jest wpisany w okrąg o promieniu *R*, zaś trójkąt o boku $a+1$ i kącie ostrym α, leżącym naprzeciw tego boku, jest wpisany w okrąg o promieniu $R+1$.Wyznacz miarę kąta α.

Komentarz do zadania

Skorzystaj z twierdzenia sinusów dla każdego z dwóch opisanych trójkątów i zapisz dwie równości, które wiążą *a*, *R* oraz sinus kąta α. Wyznacz np. z jednej z nich zmienną *a* i podstaw do drugiej zależności. Pozwoli ci to obliczyć wartość funkcji sinus.

Przykładowe rozwiązanie

Z twierdzenia sinusów mamy odpowiednio:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R, \tag{1}$$

$$\frac{a+1}{\sin\alpha} = 2(R+1). \tag{2}$$

Z równania (1) otrzymujemy, że $a = 2R\sin\alpha$. Po podstawieniu do (2) i równoważnym przekształceniu otrzymujemy:

$$\frac{2R\sin\alpha + 1}{\sin\alpha} = 2(R+1),$$

$$2R + \frac{1}{\sin\alpha} = 2R + 2,$$

$$\frac{1}{\sin\alpha} = 2,$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

Zatem $\alpha = 30°$.

Zadanie 52.

Trójkąt równoramienny ABC jest wpisany w okrąg o równaniu $(x-5)^2+(y+3)^2=5$. Podstawą trójkąta ABC jest odcinek AB zawarty w prostej o równaniu $x-y-7=0$. Oblicz pole trójkąta ABC. Rozważ wszystkie przypadki.

Komentarz do zadania

Z podanego w zadaniu równania okręgu odczytaj promień R oraz środek S tego okręgu. Analizując treść zadania, możesz wykonać odpowiedni rysunek. Czy będzie tylko jeden trójkąt spełniający warunki zadania?

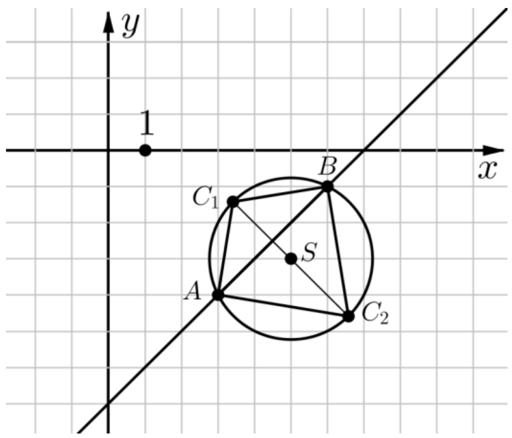
Oblicz odległość d środka S od podanej prostej. Na rysunku znajdź trójkąt prostokątny, którego bokami będą: wyznaczona odległość d, promień okręgu R i połowa odcinka AB (stanowi on podstawę trójkąta ABC). Oblicz długość odcinka AB.

Do obliczenia pola trójkąta ABC potrzebna jest jeszcze jego wysokość. Możesz ją obliczyć, wykorzystując d i R.

Przykładowe rozwiązanie

Środkiem okręgu $(x-5)^2+(y+3)^2=5$ jest punkt $S=(5,-3)$, natomiast promień $R=\sqrt{5}$.

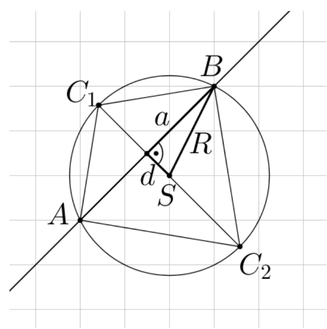
W okrąg można wpisać dwa trójkąty równoramienne ABC_1 i ABC_2, których podstawą jest odcinek AB (zobacz rysunek).



Obliczamy odległość d środka S od prostej o równaniu $x-y-7=0$:

$$d=\frac{|5+3-7|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Oznaczmy przez $a=\frac{1}{2}|AB|$ (zobacz rysunek obok).



Z twierdzenia Pitagorasa możemy zapisać:

$$a^2+d^2=R^2.$$

Zatem $a=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, czyli $|AB|=3\sqrt{2}$.

Uwaga

Długość odcinka AB możemy też obliczyć, wyznaczając najpierw współrzędne punktów przecięcia danej prostej i okręgu. Wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y+3)^2=5\\ y=x-7\end{cases}$$

Wysokość trójkąta ABC_1 poprowadzona z wierzchołka C_1 jest równa

$$h_1=R-d=\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Wysokość trójkąta ABC_2 poprowadzona z wierzchołka C_2 jest równa

$$h_2=R+d=\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Z tego wynika, że pole trójkąta ABC_1:

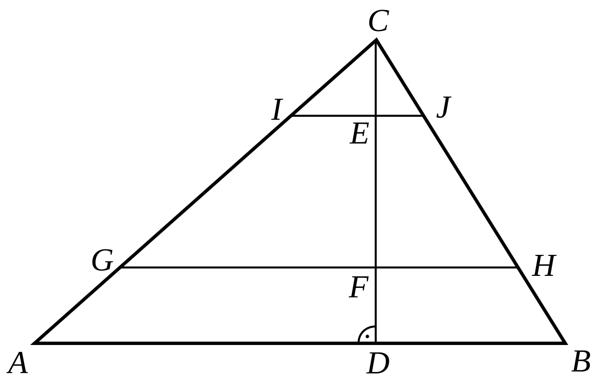
$$P_1=\frac{\left(\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{10}-3}{2}$$

oraz pole trójkąta ABC_2:

$$P_2=\frac{\left(\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{10}+3}{2}.$$

Zadanie 53.

Dany jest trójkąt ABC o polu równym P. Odcinki IJ i GH, których końce leżą na bokach trójkąta, są równoległe do boku AB i przecinają wysokość CD w punktach E i F takich, że $|CE|=|DF|=\frac{1}{4}\cdot|CD|$ (zobacz rysunek).



Pole trapezu $GHJI$ jest równe

A. $\frac{1}{2}P$ B. $\frac{9}{16}P$ C. $\frac{2}{3}P$ D. $\frac{3}{4}P$

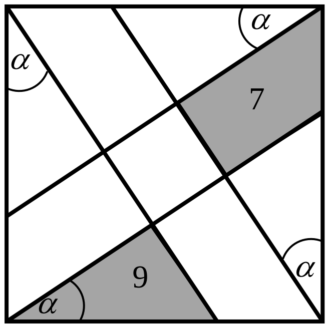
Komentarz do zadania

Zwróć uwagę, że trójkąty *IJC*, *GHC*, *ABC* są podobne. Wyznacz skalę podobieństwa trójkąta *IJC* do trójkąta *ABC* oraz skalę podobieństwa trójkąta *GHC* do trójkąta *ABC*, a następnie wykorzystaj to do ustalenia stosunku pól tych trójkątów.

Pole trapezu jest różnicą pola trójkąta *GHC* i pola trójkąta *IJC*.

Zadanie 54.

Z wierzchołów kwadratu poprowadzono do odpowiednich boków proste pod takim samym kątem α, mniejszym od 45°, (zobacz rysunek obok). Proste te wyznaczają w szczególności trójkąt (zacieniowany) o polu 9 i czworokąt (zacieniowany) o polu 7. Wyznacz pole kwadratu.



Komentarz do zadania

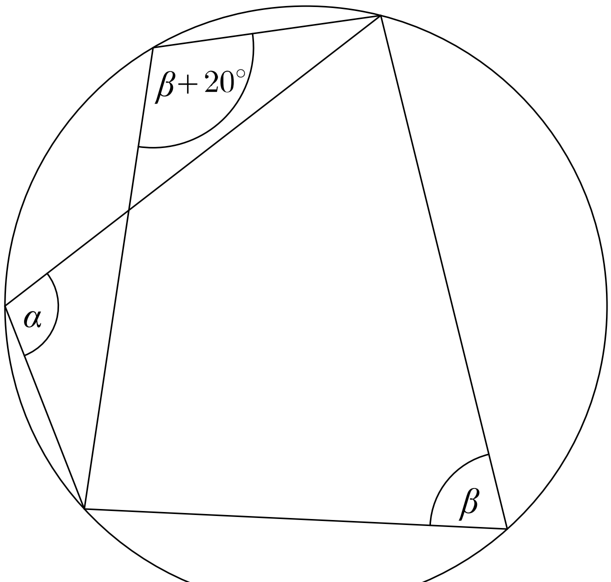
„Dołącz” do zacieniowanego trójkąta trapez „po prawej stronie”. Jakie będzie pole otrzymanego trójkąta? Ile będzie równy stosunek pól otrzymanego trójkąta i trójkąta zacieniowanego?

Czy widzisz, że te trójkąty są podobne? Ile jest równa skala podobieństwa tych trójkątów? (Pamiętaj, że stosunek odpowiednich pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa). Wyraź podstawę zacieniowanego trójkąta jako ułamek boku kwadratu.

„Dołącz” teraz do otrzymanego trójkąta „mały” trójkąt po prawej stronie i oblicz pole otrzymanej figury. Jak wyrazisz to pole poprzez długości odpowiednich podstaw wcześniej rozważanych trójkątów?

Zadanie 55.

Wartość wyrażenia $\sin(2\alpha - \beta)$ jest równa



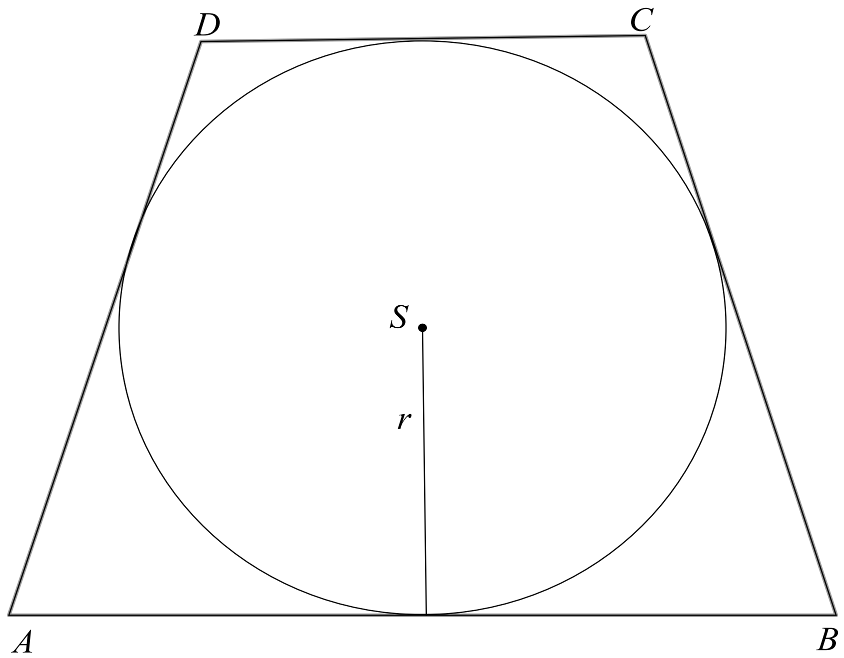
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

Zadanie 56.

W trójkącie ABC są dane $|AB| = 8$, $|BC| = 6$ oraz $\sin\sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Oblicz stosunek promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC do promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 57.

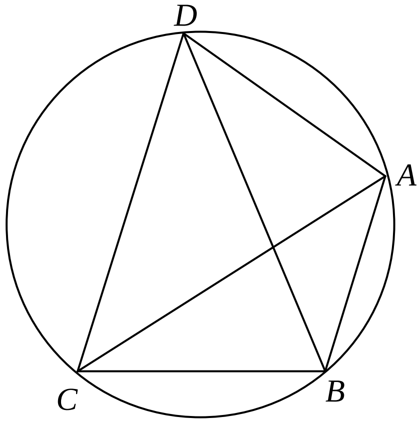
Rysunek przedstawia trapez równoramienny $ABCD$ opisany na okręgu o środku S i promieniu $r = \frac{\sqrt{91}}{2}$. Dolna podstawa trapezu jest o 6 dłuższa od górnej podstawy.



Oblicz obwód trapezu $ABCD$.

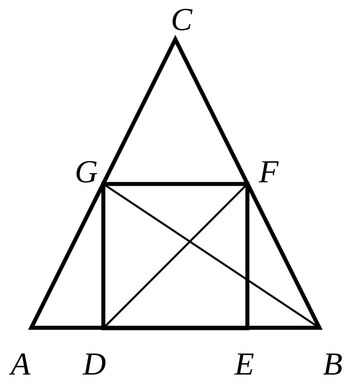
Zadanie 58.

Czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg S spełnia następujące warunki: $|BD| = |DC|$, $|AB| = 4$, $|AC| = 6$, $|AD| = 5$. Oblicz długość promienia okręgu S.



Zadanie 59.

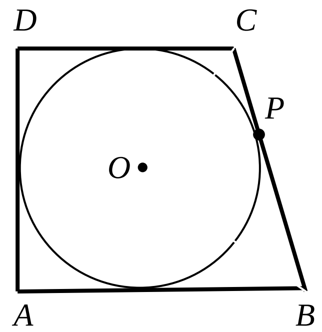
W trójkąt równoramienny *ABC* wpisano kwadrat w taki sposób, że bok *DE* kwadratu zawiera się w podstawie *AB* trójkąta, a wierzchołki *F* i *G* kwadratu leżą odpowiednio na ramionach *BC* i *AC* trójkąta (zobacz rysunek).



Pole trójkąta *CFG* jest równe sumie pól trójkątów *ADG* i *BEF*. Oblicz sinus kąta ostrego, pod jakim przecinają się odcinki *DF* i *BG*.

Zadanie 60.

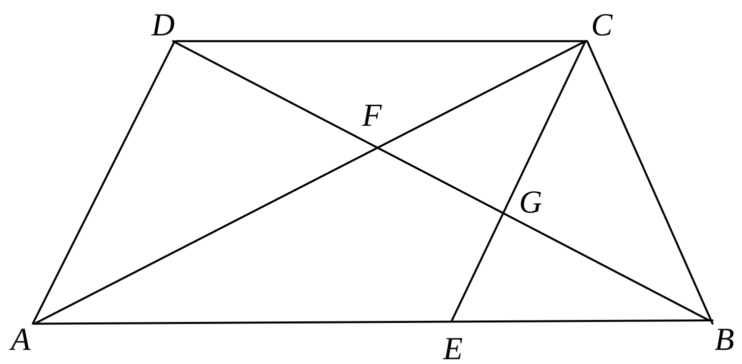
W trapez prostokątny *ABCD* wpisano okrąg o środku *O*, który w punkcie *P* jest styczny do dłuższego ramienia *BC* tego trapezu (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $|BP| = p$ i $|CP| = q$, to obwód trapezu jest równy $2\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2$.

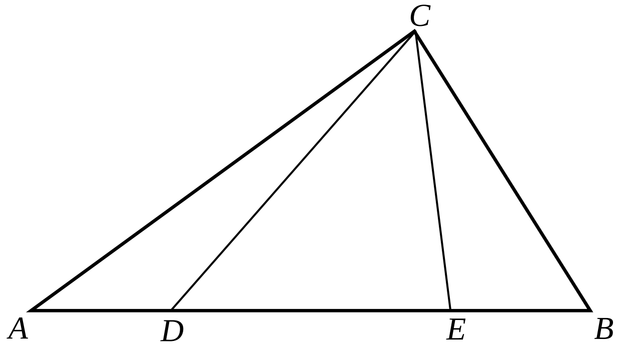
Zadanie 61.

Na podstawie *AB* trapezu *ABCD* ($|AB| > |CD|$) wyznaczono taki punkt *E*, że czworokąt *AECD* jest równoległobokiem. Przekątna *BD* przecina odcinki *CA* i *CE* odpowiednio w punktach *F* i *G*. Odcinki *DG* i *BF* są równej długości. Uzasadnij, że $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Zadanie 62.

Na boku AB trójkąta ABC obrano punkty D i E takie, że $|AD| = |EB| = \frac{1}{4}|AB|$ (zobacz rysunek).

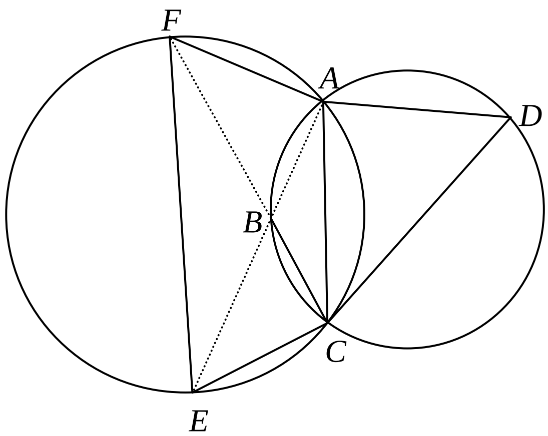


Udowodnij, że

$$|AC|^2 + 2|CE|^2 = |BC|^2 + 2|CD|^2 .$$

Zadanie 63.

Okrąg o_1 jest opisany na czworokącie $ABCD$, natomiast o_2 jest opisany na czworokącie $AFEC$ (zobacz rysunek). Punkty A, B, E są współliniowe i zachodzi równość $|\sphericalangle BFE| = |\sphericalangle CDB|$. Udowodnij, że punkty F, B, C są współliniowe.



Zadanie 64.

Zbadaj, czy punkt $(3,-1)$ leży na prostej przechodzącej przez punkt $(1,3)$ prostopadłej do prostej o równaniu $\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2} = 0$.

Zadanie 65.

Narysuj w układzie współrzędnych następujące zbiory: $(x+1)^2 + (y+1)^2 \le 25$ oraz $y \ge \frac{1}{7}x + 2\frac{5}{7}$ i oblicz pole figury F, która jest częścią wspólną narysowanych zbiorów.

Zadanie 66.

Okręgi o_1 i o_2 są dane, odpowiednio, równaniami $x^2+y^2=1$ oraz $(x-6)^2+(y-3)^2=5$. Środki tych okręgów połączono odcinkiem, który przecina okrąg o_1 w punkcie *A* oraz okrąg o_2 w punkcie *B*. Wyznacz współrzędne środka odcinka *AB*.

Zadanie 67.

Dany jest okrąg o równaniu $(x-5)^2+(y-3)^2=9$. Wyznacz równania stycznych do danego okręgu przechodzących przez początek układu współrzędnych.

Zadanie 68.

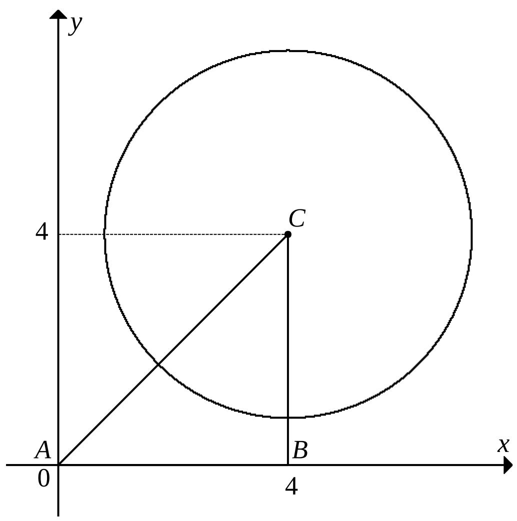
Dany jest okrąg O_1 o równaniu $(x-3)^2+y^2=36$ oraz okrąg O_2 o równaniu $x^2+(y-m)^2=m^2$. Dla jakich wartości parametru m okręgi O_1 i O_2 mają dokładnie jeden punkt wspólny? Dla znalezionych wartości parametru m wyznacz równanie prostej przechodzącej przez środki tych okręgów.

Zadanie 69.

Dany jest punkt $A=(0,0)$. Punkt *B*, różny od punktu *A*, należy do okręgu o równaniu $(x-2)^2+y^2=4$. Wykaż, że środek odcinka *AB* należy do okręgu o równaniu $(x-1)^2+y^2=1$.

Zadanie 70.

Na rysunku jest przedstawiony trójkąt prostokątny *ABC*, którego wierzchołkami są punkty $A=(0,0)$, $B=(4,0)$ i $C=(4,4)$, oraz okrąg o środku *C*, który dzieli trójkąt na dwie figury o równych polach.



Wyznacz równanie tego okręgu.

Zadanie 71.

Dany jest trójkąt prostokątny *KLM* o kącie prostym przy wierzchołku *K*, ograniczony prostymi *KL:* $2x+3y+5=0$, *LM:* $7x+4y-2=0$ oraz prostą *KM*. Wyznacz równanie prostej *KM*, wiedząc, że pole trójkąta *KLM* jest równe 13.

Zadanie 72.

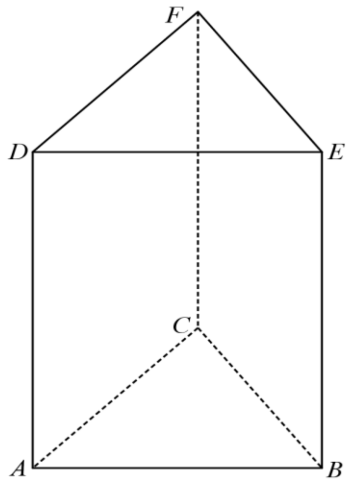
Dwa boki trójkąta o polu równym 20 zawierają się w prostych prostopadłych *k*: $ax+by-4a=0$ oraz *l*: $(2b-1)x-ay-8b+4=0$. Trzeci bok tego trójkąta zawiera się w osi *Oy*. Wyznacz wszystkie dodatnie wartości parametrów *a* i *b*, dla których spełnione są warunki zadania.

Zadanie 73.

Wykaż, że jeśli prosta o równaniu $y=kx+l$ jest styczna do okręgu o równaniu $(x-k)^2+(y-l)^2=m^2$, gdzie $k,l\in R$ oraz $m>0$, to $\frac{k^4}{k^2+1}=m^2$.

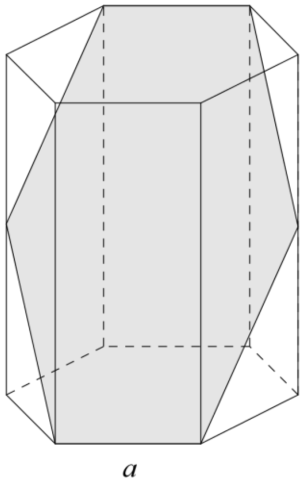
Zadanie 74.

Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego *ABCDEF* (zobacz rysunek obok) jest równa 6. Punkt *K* dzieli krawędź boczną *CF* w stosunku 2:3. Pole przekroju tego graniastosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy *AB* i punkt *K* jest równe $15\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



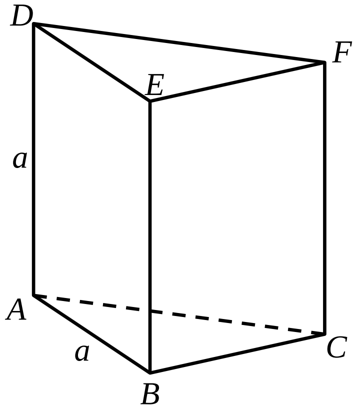
Zadanie 75.

Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy równej 4. Graniastosłup przecięto płaszczyzną jak na rysunku. Otrzymano w ten sposób przekrój o polu równym $48\sqrt{2}$. Oblicz objętość danego graniastosłupa.



Zadanie 76.

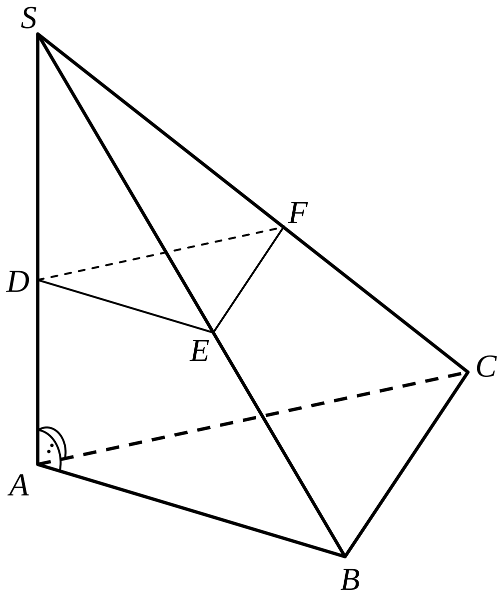
Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny *ABCDEF*, w którym każda krawędź ma tę samą długość równą *a* (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli przekrój tego graniastosłupa płaszczyzną zawierającą krawędź *AB* podstawy tego graniastosłupa jest trapezem, to płaszczyzna ta jest nachylona do płaszczyzny podstawy *ABC* graniastosłupa pod takim kątem α, że $\operatorname{tg}\alpha > \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Zadanie 77.

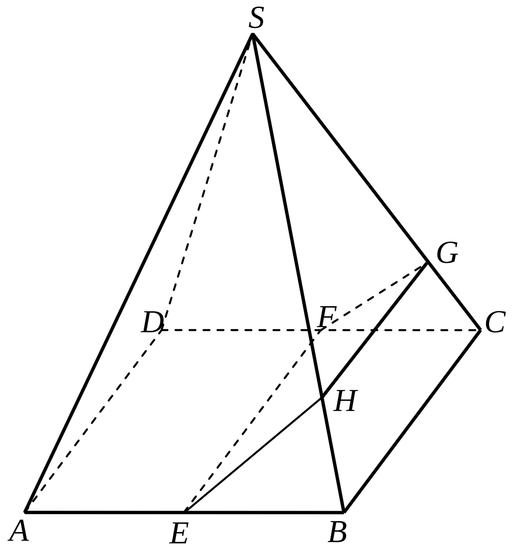
Dany jest ostrosłup trójkątny *ABCS*, w którym krawędź boczna *AS* jest jednocześnie wysokością ostrosłupa, a kąt między każdymi dwiema krawędziami bocznymi jest równy 60°. Przez punkt *D* leżący na krawędzi *AS* poprowadzono płaszczyznę równoległą do płaszczyzny podstawy *ABC*. Płaszczyzna ta przecięła krawędzie boczne *BS* i *CS* w punktach *E* i *F* (zobacz rysunek).



Pole trójkąta *ABC* jest równe P_1, a pole trójkąta *DEF* jest równe P_2. Oblicz odległość między płaszczyznami *ABC* i *DEF*.

Zadanie 78.

Punkt S jest wierzchołkiem ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, a punkty E, F są odpowiednio środkami krawędzi AB i CD jego podstawy. Krawędź podstawy i wysokość tego ostrosłupa mają taką samą długość równą 1. Płaszczyzna przechodząca przez punkty E i F przecina krawędzie boczne odpowiednio w punktach G oraz H (zobacz rysunek).



Oblicz pole otrzymanego przekroju, wiedząc, że jest ono dwa razy większe od pola czworokąta $BCGH$.

1.5. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Zadanie 79.

Zdarzenia losowe A, B, C zawarte w Ω są takie, że $C \subset A$, $P(C) > 0$ i $P(A' \cap B) > 0$. Wykaż, że $P(C \mid A) > P(C \mid A \cup B)$.

Komentarz do zadania

Zapisz odpowiednie prawdopodobieństwa warunkowe $P(C \mid A)$ i $P(C \mid A \cup B)$.

$$P(C \mid A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} \quad \text{oraz} \quad P(C \mid A \cup B) = \frac{P\left(C \cap \left(A \cup B\right)\right)}{P(A \cup B)}.$$

Skorzystaj z założeń o zdarzeniach A, B, C.

Ponieważ $C \subset A$, to $C \subset \left(A \cup B\right)$ oraz $C \cap A = C \cap \left(A \cup B\right) = C$, czyli .

$$P(C \mid A) = \frac{P(C)}{P(A)} \text{ i } P(C \mid A \cup B) = \frac{P(C)}{P(A \cup B)}.$$

Przykładowe rozwiązanie

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego mamy

$$P(C\,|\,A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)} \quad \text{i} \quad P(C\,|\,A\cup B)=\frac{P\big(C\cap(A\cup B)\big)}{P(A\cup B)}.$$

Ponieważ $C\subset A$, to $C\cap A=C\cap\big(A\cup B\big)=C$.

Stąd wynika, że $P(C\,|\,A)=\frac{P(C)}{P(A)}$ i $P(C\,|\,A\cup B)=\frac{P(C)}{P(A\cup B)}$.

Z założenia $P(A'\cap B)>0$ wynika, że $P(A\cup B)=P(A)+P(A'\cap B)>P(A)$,

czyli $P(C\,|\,A)>P(C\,|\,A\cup B)$.

Zadanie 80.

Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie trzy liczby ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 4, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta.

Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Komentarz do zadania

Losujemy jednocześnie trzy liczby z danego zbioru. Zastanów się, czym jest pojedyncze zdarzenie elementarne, a następnie wprowadź oznaczenia, na przykład niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 4, a B — zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb będzie parzysta. Twoim zadaniem jest obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego w modelu klasycznym

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{|A\cap B|}{|B|}$$

Oblicz moc zdarzenia B. Pomyśl, kiedy suma trzech liczb jest parzysta? Będą dwie możliwości. Teraz wyznacz liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia $A\cap B$ — suma trzech liczb jest parzysta i jednocześnie wśród nich jest liczba 4. W tym przypadku również będą dwie możliwości. Oblicz moc zdarzenia $A\cap B$ i oblicz prawdopodobieństwo warunkowe.

Zadanie 81.

Cztery kule ponumerowano kolejnymi liczbami od 1 do 4. Ustawiamy te kule losowo w szereg i zapisujemy liczbę, której kolejnymi cyframi są numery na kulach. Prawdopodobieństwo, że zapisana liczba nie jest podzielna przez 4, jest równe

A. $\frac{6}{4^4}$ B. $\frac{18}{4^4}$ C. $\frac{6}{4!}$ D. $\frac{18}{4!}$

Zadanie 82.

Liczby x, y, z należą do zbioru $\{1,2,3,...,100\}$. Liczba uporządkowanych trójek liczb (x,y,z) spełniających warunek: liczba $x^2+y^2+z^2$ jest podzielna przez 3, jest równa

A. $\binom{33}{3}+\binom{67}{3}$

B. $\binom{33}{3}+\binom{33}{3}+\binom{34}{3}$

C. 33^3+67^3

D. $33^3+33^3+67^3$

Zadanie 83.

Oblicz, ile jest trzycyfrowych liczb całkowitych dodatnich, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie dwie różne cyfry.

Zadanie 84.

Zbiór $A=\{1,2,3,...,2n-1,2n\}$, gdzie $n\geq 4$, jest złożony z $2n$ kolejnych liczb naturalnych. Rozpatrujemy wszystkie czteroelementowe podzbiory zbioru *A*. Przez *x* oznaczmy liczbę podzbiorów, których suma wszystkich elementów jest parzysta, a przez *y* oznaczmy liczbę podzbiorów, których suma wszystkich elementów jest nieparzysta. Wykaż, że $x-y=\binom{n}{2}$.

Zadanie 85.

Na wspólnym zebraniu klas IIIA i IIIB postanowiono wylosować dwie osoby, które będą kierowały przygotowaniami do studniówki. Każda z tych dwóch klas liczy 20 osób; w IIIA jest 6 dziewcząt, w klasie IIIB jest dziewcząt 12. Jakie jest prawdopodobieństwo, że obie wylosowane osoby są dziewczętami, jeśli obie pochodzą z tej samej klasy?

Zadanie 86.

Doświadczenie losowe polega na dwóch rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że wartość bezwzględna różnicy wyrzuconych liczb będzie większa od 2, jeżeli wiadomo, że suma kwadratów tych liczb przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1.

Zadanie 87.

Zdarzenia losowe A,B zawarte w Ω są takie, że $P(B)>0$ i prawdopodobieństwo warunkowe $P(A\setminus B)=0{,}386$. Oblicz $\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Zadanie 88.

Zdarzenia losowe A, B zawarte w Ω są takie, że $P(A \cup B) = 0{,}9$; $P(A \cap B') = 0{,}2$; $P(A' \cap B) = 0{,}4$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe $P(A \setminus B)$.

1.6. Rachunek różniczkowy

Zadanie 89.

Funkcja $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x + 1$ jest malejąca w przedziale

A. $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{6}\right\rangle$ B. $\left(-\infty; 0\right\rangle$ C. $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right\rangle$ D. $\left\langle \frac{\sqrt{3}}{6}; +\infty\right)$

Komentarz do zadania

Funkcja *f* jest wielomianem stopnia trzeciego i aby wyznaczyć zbiór, w którym jest ona malejąca, możesz posłużyć się jej pochodną. Wyznacz pochodną funkcji *f*. Otrzymasz $f'(x) = 6x^2 - \frac{1}{2}$ Czy pamiętasz, jaka jest zależność między monotonicznością funkcji *f* a znakiem pochodnej f'? Zapamiętaj, że jeśli funkcja jest malejąca w pewnym zbiorze, to jej pochodna jest w tym zbiorze niedodatnia. Zapisz odpowiednią nierówność i ją rozwiąż. Rozwiązaniem będzie przedział $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right\rangle$.

Prawidłowa odpowiedź

C

Zadanie 90.

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 12, jest taki, który ma największą objętość. Oblicz długości krawędzi tego graniastosłupa i jego objętość.

Komentarz do zadania

Rozpatrujemy graniastosłupy prawidłowe trójkątne. Wprowadź oznaczenia, na przykład przyjmij, że *a* to długość krawędzi podstawy graniastosłupa i *H* — wysokość graniastosłupa. Suma długości wszystkich krawędzi graniastosłupa jest równa 12. Wykorzystaj tę informację i zapisz zależność między krawędzią podstawy i wysokością graniastosłupa. Wyraź objętość graniastosłupa *V* za pomocą jednej z przyjętych zmiennych: *a* lub *H*. W ten sposób otrzymasz funkcję objętości graniastosłupa. Wyznacz jej dziedzinę.

Funkcja ta, niezależnie od tego, czy wyrazisz ją za pomocą zmiennej *a*, czy *H*, jest wielomianem stopnia trzeciego. Oznacza to, że do wyznaczenia jej wartości największej możesz wykorzystać rachunek pochodnych. Dla wygody możesz analizować funkcję *V* w dziedzinie, która jest całym zbiorem liczb rzeczywistych (nazwij ją wtedy inaczej, na przykład *f*) i dopiero potem ograniczyć ten zbiór do dziedziny funkcji *V*. Ostatecznie oblicz wymiary graniastosłupa o największej objętości i tę największą objętość.

Zadanie 91.

Funkcja $f(x)=12x-x^3$ jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych. W przedziale $\langle -1,1\rangle$ funkcja f

A. jest rosnąca.

B. jest malejąca.

C. ma dokładnie jedno ekstremum lokalne.

D. ma dokładnie dwa ekstrema lokalne.

Komentarz do zadania

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna, to dla wyznaczenia jej przedziałów monotoniczności i ekstremów lokalnych korzystamy z pochodnej tej funkcji. Czy pamiętasz, jaki jest związek monotoniczności funkcji w przedziale ze znakiem jej pochodnej w tym przedziale?

Oblicz pochodną funkcji f:

$$f'(x)=12-3x^2=3(2-x)(2+x),$$

$$f'(x)>0 \quad \text{w przedziale } (-2,2).$$

W szczególności w przedziale $\langle -1,1\rangle$ pochodna jest dodatnia, czyli funkcja w tym przedziale jest rosnąca.

Zadanie 92.

Granica $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x+1)^4-(2x+3)^4}{(x+3)^3-(3x-1)^3}$ jest równa

A. 0 B. $\dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{32}{13}$ D. $+\infty$

Zadanie 93.

Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+4x-12}$.

Zadanie 94.

Jeśli $a\neq 0$, granica $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(ax)^2+(bx)^2}{(ax)^2-(bx)^2}$ jest równa 2 dla parametru b równego

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

Zadanie 95.

Funkcja f, której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, jest określona wzorem $f(x)=-2x^3+3x^2$. Funkcja f jest rosnąca w przedziale

A. $\left(-\infty;0\right\rangle$ B. $\langle 0;1\rangle$ C. $\left\langle 1;\frac{3}{2}\right\rangle$ D. $\left\langle \frac{3}{2};+\infty\right)$

Zadanie 96.

Funkcja $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+2$ ma maksimum w punkcie

A. $x=-2$ B. $x=0$ C. $x=2$ D. $x=4$

Zadanie 97.

Rozważmy wszystkie ostrosłupy prawidłowe sześciokątne, w których suma długości krótszej przekątnej podstawy i wysokości ostrosłupa jest równa 9. Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych ostrosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

Zadanie 98.

Wykaż, że równanie $2x^3-3x^2-5=0$ ma w przedziale $(2,3)$ dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 99.

Wielomian *f* jest dany wzorem $f(x)=3x^4-4kx^3+6x^2-12kx$ z parametrem rzeczywistym *k*. Wyznacz wszystkie wartości *k*, dla których funkcja *f* jest rosnąca w przedziale $\langle 2,+\infty)$ i nie jest rosnąca w żadnym przedziale postaci $\langle a,+\infty)$ dla $a<2$.

Zadanie 100.

Funkcja wymierna *f* jest dana wzorem $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$. Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą, jakie ta funkcja przyjmuje dla argumentów z przedziału $\langle -3,1\rangle$.

2. Komentarze do zadań

2.1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności

Zadanie 5.

Skorzystaj ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu, aby zapisać liczbę $\log_4 9$ jako logarytm o podstawie 2: $\log_4 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2 9 = \log_2 3$. Możesz teraz wyznaczyć sumę logarytmów: $\log_2 3 + \log_2 6 = \log_2 18$.

Zadanie 6.

Zauważ, że wszystkie logarytmy mają inne podstawy. Zastosuj wzór na zmianę podstawy logarytmu. Jeśli nie wiesz, w którym logarytmie, to podpowiem, że wystarczy zamienić logarytm o podstawie 4 na logarytm o podstawie 5.
Jaki jest związek między $\log_a b$ oraz $\log_b a$?

Zadanie 7.

Liczba, której wartość chcesz obliczyć, zapisana jest w postaci potęgi podniesionej do potęgi. Wykorzystaj wzór na potęgę potęgi i zapisz tę liczbę w innej postaci: $\left(2^7\right)^{\log_2 7} = 2^{7\log_2 7}$. Następnie, wykorzystując wzór na logarytm potęgi, przekształć wykładnik tej potęgi do postaci $2^{\log_2 7^7}$. Skorzystaj z własności logarytmu $a^{\log_a b} = b$ i podaj wynik $\left(2^7\right)^{\log_2 7} = 7^7$.

Zadanie 8.

Oznacz przez x jedną z trzech szukanych liczb całkowitych (np. najmniejszą) i zapisz równanie wielomianowe wynikające z treści zadania. Wyznacz rozwiązania tego równania, np. rozkładając wielomian na czynniki metodą grupowania. Podając odpowiedź, pamiętaj, że szukane liczby mają być całkowite.

Zadanie 9.

Jak zapiszesz wielomian, jeżeli znasz wszystkie pierwiastki tego wielomianu i liczba pierwiastków jest równa stopniowi wielomianu?

Wykorzystując fakt, że wielomian $x^3 - 2x + 1$ można zapisać w postaci

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc,$$

napisz, co można powiedzieć o wyrażeniach postaci:

$$a+b+c,\ ab+bc+ca,\ abc.$$

Czy znając wartości tych wyrażeń, możesz wyznaczyć wartość poszukiwanego wyrażenia $a^2 + b^2 + c^2$?

Uwaga: Zadanie możesz także rozwiązać poprzez wyznaczenie pierwiastków wielomianu $x^3 - 2x + 1$.

Zadanie 10.

Składniki zawierające niewiadomą x zapisz po jednej stronie równania i wyłącz x przed nawias. Z otrzymanej równości wyznacz x. Dla jakich wartości parametru k nie możesz wykonać niezbędnego dzielenia i jaką postać przyjmuje wyjściowe równanie dla tych wartości parametru?

Zadanie 11.

Wykorzystaj fakt, że dla $a > 0$ równanie $|x| = a$ jest równoważne alternatywie równań $x = a$ lub $x = -a$ i zapisz podane równanie w postaci alternatywy dwóch takich równań, żeby w każdym z nich symbol wartości bezwzględnej występował tylko jeden raz.

Zwróć uwagę, że dla $a < 0$ równanie $|x| = a$ nie ma rozwiązań.

Możesz też naszkicować wykres funkcji określonej wzorem $f(x) = ||x+3| - 4|$ i odczytać z niego, ile jest argumentów tej funkcji, dla których przyjmuje ona wartość 5.

Zadanie 12.

Spróbuj na początek usunąć wewnętrzną wartość bezwzględną po lewej stronie. Jak będzie wyglądało równanie, gdy $x \geq 1$? A jak, gdy $x < 1$? Pamiętaj też o tym, że gdy $|a| = |b|$, to $a = b$ lub $a = -b$.

Możesz również rozwiązać zadanie graficznie, rysując wykresy lewej i prawej strony równania.

Zadanie 13.

Wyznacz te wartości zmiennej, dla których wartość 0 przyjmują wyrażenia „pod modułem”, tzn. te, dla których $2x - 2 = 0$ oraz $x = 0$. Otrzymane liczby dzielą oś liczbową na trzy przedziały. Twoim zadaniem jest rozwiązać zadaną nierówność w każdym z tych przedziałów.

Zauważ, że np. w przedziale $(-\infty, 0)$ wyrażenie $2x - 2$ przyjmuje wartości ujemne, zatem $|2x - 2| = -(2x - 2)$. Podobnie $|x| = -x$. Rozwiąż nierówność, którą otrzymałeś po usunięciu symbolu wartości bezwzględnej. Pamiętaj jednak, że wciąż rozważasz tę nierówność w przedziale $(-\infty, 0)$.

Podobnie musisz postąpić w każdym z dwóch pozostałych przedziałów.

Rozwiązaniem są wszystkie rozwiązania otrzymane w każdym z trzech analizowanych przedziałów (suma otrzymanych zbiorów).

Zadanie 14.

Rozpatrz odpowiednie przypadki, które wyznaczysz, wyliczając miejsca zerowe wyrażeń znajdujących się pod wartościami bezwzględnymi. Miejsca zerowe podzielą zbiór liczb rzeczywistych na rozłączne ze sobą przedziały. Uwzględniając poszczególne przedziały, opuść wartości bezwzględne, rozwiąż nierówności i w każdym z przypadków znajdź część wspólną rozwiązania nierówności i przedziału, w którym była rozpatrywana. Rozwiązaniem całej nierówności jest suma rozwiązań, które zostały uzyskane z poszczególnych przypadków. Rozwiązaniem nierówności danej w zadaniu powinien być zbiór liczb rzeczywistych, co dowodzi, że nierówność $|x+5| + |x-2| \geq 7$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Zadanie 15.

Zauważ, że korzystając z własności wartości bezwzględnej iloczynu, możesz zapisać, że $\left|x^2-4\right|=|x-2|\cdot|x+2|$, zatem nierówność $\left|x^2-4\right|<|x-2|$ jest równoważna nierówności $|x-2|\cdot|x+2|<|x-2|$. Po obu jej stronach występuje ten sam czynnik: $|x-2|$. Możesz go wyłączyć przed nawias, otrzymując nierówność $|x-2|\cdot(|x+2|-1)<0$.

Wiesz z pewnością, że zachodzi nierówność $|x-2|\geq 0$, więc wystarczy wyznaczyć rozwiązanie nierówności $|x+2|-1<0$, czyli $|x+2|<1$.

Zadanie 16.

Możesz obliczyć pierwiastki trójmianu $5x^2+4x-3$ za pomocą wzorów, ale możesz też wykorzystać wzory Viète'a na sumę i iloczyn pierwiastków: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. Otrzymasz w ten sposób proste wyrażenie zawierające tylko współczynniki trójmianu.

Zadanie 17.

Skorzystaj ze wzorów Viète'a: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ oraz $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. Ponieważ $x_1+x_2=2x_1x_2$, to $-b=2c$.

Zauważ, że warunek $b=2c$ oznacza, że $-\frac{2c}{a}=x_1+x_2=2x_1x_2=\frac{2c}{a}$, skąd mamy $c=0$, wbrew założeniu. Podobnie warunek $c=2b$ implikuje równość $-\frac{b}{a}=x_1+x_2=2x_1x_2=\frac{4b}{a}$, skąd wynika $b=0$ i w konsekwencji $c=0$, wbrew założeniu. Wreszcie warunek $2b=-c$ prowadzi do równości $-\frac{b}{a}=x_1+x_2=2x_1x_2=-\frac{4b}{a}$, skąd mamy $b=0$ i w konsekwencji $c=0$, wbrew założeniu.

Zadanie 18.

Zacznij od sprawdzenia, czy równanie z zadania zawsze jest równaniem kwadratowym. Odpowiedź brzmi: nie, a zatem zacznij od analizy, co się dzieje, gdy równanie jest liniowe.

Dla $m\neq 0$ równanie jest kwadratowe. Spróbuj je przekształcić do innej postaci. Czy można zrobić tak, aby wyrażenia zawierające niewiadome były tylko po jednej stronie równania, a wyrażenie z parametrem tylko po drugiej stronie równania?

Jeżeli udało ci się wskazać taką postać, to zadanie może dać się rozwiązać z użyciem wykresu. Zatem narysuj wykres funkcji o zmiennej *x* w zadanej dziedzinie.

Czy wiesz już, jak określić liczbę rozwiązań zadania w zależności od tego, ile razy prosta pozioma przetnie wykres funkcji kwadratowej zmiennej *x*?

Zapisz stosowne nierówności, opisujące liczbę takich przecięć w zależności od wartości parametru *m*.

Zadanie 19.

Zauważ, że wykres funkcji f przecina prostą o równaniu $y=-x+1$ w dwóch punktach, gdy równanie $(m-1)x^2-2x-m+1=-x+1$ ma dwa rozwiązania. Czy zawsze będzie to równanie kwadratowe? Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których rozważane równanie ma dwa rozwiązania. Jaki warunek musi być spełniony, aby rozwiązania x_1, x_2 tego równania miały przeciwne znaki? Możesz wykorzystać wzór Viète'a. Rozwiąż otrzymaną nierówność. Teraz pozostaje zapisać zbiór wszystkich szukanych wartości parametru m.

Zadanie 20.

Korzystając ze wzorów Viète'a, podaną sumę uzależnij od iloczynu i sumy pierwiastków równania. Otrzymane wyrażenie przedstaw w postaci iloczynu. Ponieważ przedstawia on liczbę, która nie jest złożona, to jeden ze składników musi być równy 1 lub –1. Stąd wyznaczysz pierwiastki równania. Na tej podstawie uzasadnij, że jednym z nich jest liczba 2.

Zadanie 21.

Przenieś wszystkie wyrazy nierówności na jedną stronę i zapisz lewą stronę nierówności w postaci uporządkowanego trójmianu kwadratowego z niewiadomą x i parametrem m (można też odwrotnie). Zauważ, że współczynnik trójmianu przy x^2 jest dodatni. Kiedy trójmian kwadratowy przyjmuje nieujemne wartości dla dowolnych argumentów? Zapisz odpowiedni warunek i wykaż, że zachodzi on dla dowolnej liczby rzeczywistej m.

Zadanie 22.

Reszta z dzielenia wielomianu f przez dwumian $x-2$ jest równa $f(2)$. Jakie musi być a, aby ta reszta była równa 3?

Zadanie 23.

Wykorzystaj fakt, że reszta z dzielenia (dowolnego) wielomianu W przez dwumian $ax+b$ jest równa $W\left(-\frac{b}{a}\right)$ (wynika to z twierdzenia Bezouta). Zatem reszta z dzielenia przez $2x+4$ jest równa $W(-2)$. Ale wielomian W składa się tylko z parzystych potęg zmiennej x, więc $W(-2)=W(2)=2014$

Zadanie 24.

Wielomian W jest podzielny przez dwumian $2x+1$. Czy na tej podstawie możesz wskazać pierwiastek tego wielomianu? Reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x-2$ jest równa 105. Jaką wartość przyjmuje wielomian W dla argumentu 2? Korzystając z tych informacji, zapisz układ dwóch równań z niewiadomymi a i b. Następnie oblicz wartości a i b oraz wstaw je do wzoru, którym określony jest wielomian W. Rozłóż ten wielomian na czynniki np. metodą grupowania, a następnie wyznacz jego pierwiastki.

Zadanie 25.

Z pewnością widzisz, co należy podstawić w miejsce a, aby skorzystać z podanego wzoru do przekształcenia wyrażenia po prawej stronie równania — oczywiście $a = x$. Jaką wartość będzie miała liczba b? Jeśli jeszcze tego nie widzisz, to zapisz w innej postaci liczbę $\left(\sqrt{2}\right)^3$.

Teraz już możesz skorzystać z podanego wzoru. Zauważ, że po obu stronach równania występuje takie samo wyrażenie — możesz je wyłączyć przed nawias jako wspólny czynnik. Otrzymujesz iloczyn wyrażenia liniowego przez trójmian kwadratowy. Pozostaje obliczyć pierwiastki każdego z nich.

Zadanie 26.

Zauważ, że wyrażenie w drugim nawiasie jest sumą wyrażenia, które znajduje się w pierwszym nawiasie, i liczby 2. Oznacz jedną literą, np. t, to powtarzające się wyrażenie i raz jeszcze zapisz równanie, ale zamiast powtarzającego się wyrażenia zapisz wprowadzoną literę — wykonujesz tak zwane podstawienie. Teraz rozwiąż otrzymane równanie z niewiadomą t. Obliczyłeś w ten sposób wszystkie wartości, jakie może przyjąć t. Dla jakich x wyrażenie, które oznaczyłeś literą t, przyjmuje obliczone wartości?

Zadanie 27.

Rozpocznij od obliczenia pierwszych współrzędnych punktów wspólnych wykresów funkcji f i w. W tym celu zapisz równanie, które trzeba rozwiązać, i przekształć je do postaci: $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$. Rozłóż lewą stronę równania na czynniki (zauważ, że $8x^2 = 9x^2 - x^2$) i wyznacz jego rozwiązania. Teraz pozostaje odczytać rozwiązanie nierówności z rysunku.

Zadanie 28.

Jeżeli wielomian W jest podzielny przez dwumian $\frac{1}{2}x + 2$, to jaka liczba jest jednym z jego miejsc zerowych?

Po podzieleniu wielomianu W przez dwumian $\frac{1}{2}x + 2$ otrzymasz pewien wielomian Q. Pozostałe miejsca zerowe wielomianu W są miejscami zerowymi wielomianu Q. Rozłóż wielomian Q na czynniki (np. metodą grupowania) i wyznacz jego miejsca zerowe.

Zauważ, że wykres wielomianu $W(x+2)$ powstaje przez przesunięcie wykresu wielomianu W o dwie jednostki w lewo — możesz naszkicować ten wykres. Jakie miejsca zerowe ma wielomian $W(x+2)$? Odczytaj z naszkicowanego wykresu zbiór rozwiązań nierówności $W(x+2) \geq 0$.

Zadanie 29.

Zacznij od przekształcenia wzoru funkcji g: wyznacz wartość funkcji f dla k oraz dla $k - 2$ (skorzystaj ze wzoru na sześcian różnicy). Aby ustalić, dla jakiego k funkcja g przyjmuje wartość 80, rozwiąż równanie wielomianowe $k^3 + 6k^2 - 12k + 8 = 80$ (pomocne będzie grupowanie wyrazów).

Zadanie 30.

Z własności funkcji kwadratowej wynika, że $-\frac{b}{2a}=4$. Ponadto $f(4)=-22$. Korzystając z tych informacji, możesz obliczyć a i b.

Podstaw a i b do danego równania. Teraz pozostaje wyznaczyć jego rozwiązania — możesz np. wykorzystać podane rozwiązanie i podzielić wielomian przez odpowiedni dwumian.

2.2. Funkcje

Zadanie 35.

Przyjmij, że szukana funkcja *f* ma postać $f(x)=ax^2+bx+c$. Przyjrzyj się wykresowi funkcji $g(x)=k\cdot f(x)$. Miejscami zerowymi funkcji *g* są liczby -2 i 3. Skoro funkcja *g* jest iloczynem pewnej stałej liczby *k* i funkcji *f*, to jakie miejsca zerowe będzie miała funkcja *f* ? Napisz postać iloczynową funkcji *f*.

Następnie zapisz funkcję $h(x)=f(kx)$ w postaci ogólnej.

Oczekiwany wzór funkcji to $h(x)=f(kx)=a(kx)^2+b\cdot kx+c$. Który współczynnik funkcji *f* nie uległ zmianie? Jakie jest znaczenie współczynnika *c* we wzorze funkcji kwadratowej? Na pewno wiesz, że wykres każdej funkcji kwadratowej przecina oś *Oy* w punkcie $(0,c)$.

Teraz z wykresu funkcji $h(x)=f(kx)$ odczytaj współrzędne punktu przecięcia paraboli z osią *Oy*. Na pewno potrafisz już odpowiedzieć na pytanie, w jakim punkcie wykres funkcji *f* przecina oś *Oy*. Wykorzystaj współrzędne tego punktu oraz postać iloczynową funkcji *f* i napisz jej wzór.

Zadanie 36.

Zauważ, że $\cos 88^\circ=\cos(90^\circ-2^\circ)=\sin 2^\circ$. Czy możesz liczbę 1 wyrazić za pomocą wartości funkcji trygonometrycznych tego samego kąta? Dalej zastosuj wzory skróconego mnożenia. Czy możesz skrócić otrzymane wyrażenie? Teraz podziel licznik i mianownik wyrażenia przez $\cos 2^\circ$. Czy możesz zapisać $\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}$ jako wartość jednej funkcji trygonometrycznej?

Zadanie 37.

Możesz skorzystać z tego, że jeżeli funkcja $y=f(x)$ ma okres *t*, to funkcja $y=f(cx)$, gdzie $c>0$, ma okres $\frac{t}{c}$. Okresem funkcji $f(x)=\sin x$ jest np. $t=2\pi$, więc okresem funkcji $f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ jest $\frac{3}{2}\cdot 2\pi=3\pi$. Tylko funkcja, której wykres jest przedstawiony na rysunku B, spełnia ten warunek.

Możesz też zauważyć, że wartość funkcji $f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ dla argumentu $x=\pi$ jest dodatnia, gdyż $f(\pi)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)>0$. Tylko funkcja, której wykres jest przedstawiony na rysunku B, ma dla argumentu $x=\pi$ wartość dodatnią, więc poprawną odpowiedzią może być tylko B.

Zadanie 38.

Wykorzystaj okresowość funkcji trygonometrycznych sin, cos i tg i zastąp wartość każdej z funkcji trygonometrycznych sin, cos, tg dla argumentu $32\frac{1}{3}\cdot\pi$ wartością tej samej funkcji dla argumentu należącego do przedziału $\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle$. Wystarczy teraz porównać te wartości ze sobą.

Zadanie 39.

Zgodnie z treścią zadania sporządź w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x)=\cos x$ oraz $g(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$. Czy wiesz, jak na podstawie wykresu funkcji *f* narysować wykres funkcji *g*? Najpierw należy wyznaczyć okres podstawowy funkcji $g(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$. Jeśli nie wiesz, jak to zrobić, to przypomnę, że okresem podstawowym funkcji $y=\cos(ax)$ jest liczba $\frac{2\pi}{a}$, oczywiście gdy $a\neq 0$. Zapewne okres otrzymanej przez ciebie funkcji jest dwukrotnie większy niż okres funkcji cosinus. Oznacza to, że wykres funkcji cosinus należy dwukrotnie „rozciągnąć” wzdłuż osi *Ox*. Punktem wykresu, który nie zmieni położenia, jest (0,1). Jak teraz na podstawie wykresów funkcji *f* i *g* rozwiązać równanie $f(x)=g(x)$? Należy odczytać z układu współrzędnych argumenty, dla których obie funkcje osiągają tę samą wartość, czyli argumenty punktów przecięcia się tych wykresów.

Następnym etapem jest algebraiczne rozwiązanie równania $\cos x=\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$. Skorzystaj ze wzoru na różnicę cosinusów i zapisz równanie w postaci iloczynowej. Pamiętaj o okresowości funkcji $y=\sin x$. Zapisz odpowiedź w najprostszej postaci. Czy w metodzie graficznej i algebraicznej udało ci się otrzymać ten sam zbiór rozwiązań?

Zadanie 40.

Najpierw warto skorzystać ze wzoru na sinus podwojonego kąta. Jeśli po jego zastosowaniu wyłączysz przed nawias wyrażenie $\cos x$, to zauważysz z pewnością wyrażenie, które jest wspólnym czynnikiem pozwalającym zapisać równanie w postaci iloczynowej.

Funkcja cosinus przyjmuje wartość -1 tylko jeden raz w okresie. Uwzględniając okresowość tej funkcji, otrzymujemy rozwiązanie równania $\cos x=-1$; są to liczby postaci $x=\pi+2k\pi$. Tylko dla dwóch całkowitych wartości *k* liczby takiej postaci należą do przedziału $x\in\left\langle -\pi,\pi\right\rangle$. Dla których?

Funkcja sinus przyjmuje wartość $-\frac{1}{2}$ dwa razy w okresie, w szczególności dla $-\frac{\pi}{6}$ oraz dla

$\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Uwzględniając okresowość tej funkcji, otrzymujemy rozwiązanie; są to liczby postaci $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ oraz $x=\left(\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)+2k\pi$. Tylko dwie liczby takiej postaci należą do przedziału $\langle -\pi, \pi\rangle$. Które?

Zadanie 41.

Zapisz warunki, które musi spełniać $\sin 2\alpha$, aby równanie $(x^2-\sin 2\alpha)(x-1)=0$ miało trzy rozwiązania. Kiedy równanie $x^2-\sin 2\alpha=0$ ma dwa różne rozwiązania? Kiedy te rozwiązania są różne od 1?

Zadanie 42.

W równaniach i nierównościach trygonometrycznych wygodniej jest operować funkcjami tego samego argumentu, zacznij więc od wyrażenia cos 2*x* za pomocą cos *x*. Otrzymasz nierówność, w której niewiadomą jest cos *x*. Dla ułatwienia zapisu możesz ją oznaczyć nową literą, np. *t*. Rozwiąż tę nierówność (to nierówność kwadratowa). Okaże się, że nierówność jest prawdziwa, gdy $-\frac{1}{2}<\cos x<1$. Pozostaje ustalić, dla jakich wartości *x* ten warunek jest spełniony. Warto pamiętać, że cosinus jest funkcją okresową, która w pewnych przedziałach jest rosnąca, w innych malejąca.

Zadanie 43.

Zauważ, że podane równanie jest równoważne pewnej alternatywie równań. Korzystając z tego, jakie wartości przyjmują $\cos x$ i $\sin^2 x$, ustal, ile rozwiązań ma każde z nich dla różnych wartości *a* (rozpatrz przypadki: $a<0$, $a=0$, $a\in(0,1)$, $a=1$, $a>1$). Pamiętaj, by przy zliczaniu łącznej liczby rozwiązań uwzględniać to, że mogą się one powtarzać.

2.3. Ciągi

Zadanie 47.

Zauważ, że nie możesz bezpośrednio skorzystać z twierdzenia o granicy różnicy ciągów, gdyż ciągi określone wzorami $a_n=\frac{n^3+3n}{n^2+2}$, $b_n=\frac{n^2+7n}{n+21}$ nie są zbieżne do granicy skończonej. Wystarczy jednak wykonać działania na ułamkach i zapisać różnicę tych ciągów w postaci jednego ułamka algebraicznego. Teraz możesz zapisać otrzymany ułamek, np. dzieląc jego licznik i mianownik przez największą potęgę, w jakiej zmienna *n* występuje w mianowniku (wtedy ułamek nie zmienia wartości). Możesz teraz wykorzystać twierdzenia o działaniach na granicach ciągów zbieżnych do granic skończonych.

Zadanie 48.

Zauważ, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2}{n^2+1}=+\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+3}=+\infty$, więc nie możemy korzystać z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów zbieżnych. W takiej sytuacji należy zapisać wzór na wyraz ogólny ciągu w innej postaci. Czy wiesz, w jakiej? Jeżeli nie, to zapisz wyrażenie $\frac{n^3-n^2}{n^2+1}-\frac{n^2}{n+3}$ w postaci ilorazu dwóch wielomianów (sprowadź do wspólnego mianownika). Teraz już możesz obliczać granicę. Jeżeli nie wiesz, jak to zrobić, wyłącz z licznika i z mianownika n w najwyższej potędze, a potem uprość ułamek. Oblicz granicę, pamiętając o tym, że granicą ciągów postaci $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ itd. jest liczba 0.

Zadanie 49.

Aby obliczyć sumę szeregu geometrycznego (zbieżnego), musisz znać jego iloraz. Każdy z wyrazów ciągu geometrycznego można wyrazić za pomocą pierwszego wyrazu i ilorazu ciągu, podobnie jest z sumą pierwszych trzech wyrazów. Ułóż zatem równanie opisujące warunek zadania (suma pierwszych trzech wyrazów jest równa $\frac{7}{4}\sqrt{2}$) za pomocą a_1 oraz ilorazu q i oblicz możliwe wartości q. Pamiętaj, że szereg geometryczny o ilorazie q jest zbieżny (do skończonej granicy) wtedy i tylko wtedy, gdy $|q|<1$.

Zadanie 50.

Sześcian o krawędzi długości x_1 ma przekątną równą $\sqrt{3}x_1$, zaś przekątna jego ściany ma długość $\sqrt{2}x_1$. Zapisz długości krawędzi kolejnych sześcianów zgodnie z regułą opisaną w treści zadania. Jaka jest zależność pomiędzy krawędzią x_1 a krawędzią x_2, a jaka między krawędziami x_2 i x_3? Na pewno udało ci się zauważyć, że tworzą one nieskończony ciąg geometryczny. Podaj pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu. Twoim zadaniem jest obliczenie sumy długości krawędzi wszystkich sześcianów, czyli $x_1+x_2+x_3+\ldots$. Zauważ, że suma ta jest szeregiem geometrycznym. Oblicz sumę, pamiętając o sprawdzeniu warunku zbieżności szeregu geometrycznego.

2.4. Geometria

Zadanie 55.

Rysunek przedstawia okrąg opisany jednocześnie na dwóch czworokątach. Ile wynosi suma miar przeciwległych kątów w czworokącie wpisanym w okrąg? Napisz równania wynikające z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg: $\beta+\beta+20^\circ=180^\circ$, $\alpha+\beta=180^\circ$. Otrzymane równania pozwolą ci obliczyć miary kątów $\alpha=100^\circ$ i $\beta=80^\circ$. Następnie oblicz wartość wyrażenia $2\alpha-\beta=120^\circ$. Pomocny w rozwiązaniu może być wzór $\sin(180^\circ-\varphi)=\sin\varphi$. Zatem

$$\sin(2\alpha-\beta)=\sin 120^\circ=\sin\left(180^\circ-60^\circ\right)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zadanie 56.

W obliczeniach pomocne będzie twierdzenie cosinusów. Aby z niego skorzystać, najpierw wyznacz $\cos\angle ABC$. Zauważ, że mamy dwie możliwości. Dla każdej z nich oblicz długość boku *AC* oraz długość *R* promienia okręgu opisanego na trójkącie *ABC* (możesz wykorzystać twierdzenia sinusów). Czy wiesz, jakiego wzoru na pole trójkąta należy użyć do wyznaczenia długości *r* promienia okręgu wpisanego w trójkąt *ABC*? W każdym przypadku oblicz stosunek $R : r$.

Zadanie 57.

Zauważ, że w trapezie opisanym na okręgu sumy długości jego przeciwległych boków są równe. Tak więc, aby obliczyć obwód trapezu, wystarczy wyznaczyć długość jednego z jego ramion (wiemy bowiem, że $|AD| = |BC|$). Wtedy obwód trapezu będzie równy $4|AD|$. Możesz obliczyć długość ramienia *AD*, korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości $\sqrt{91}$ (średnica danego okręgu) i 3 (połowa różnicy długości podstaw trapezu).

Znając długość ramienia trapezu, obliczysz jego obwód.

Zadanie 58.

Rozpocznij rozwiązywanie zadania od obserwacji, że pewne kąty czworokąta wpisanego w okrąg są ze sobą powiązane. Przydatne będzie oznaczenie pewnego charakterystycznego kąta, np. $|\sphericalangle CDB| = \alpha$. W zależności od miary kąta *CDB* można zapisać miary kątów: *DBC*, *DAC* i *BAC*.

Jak możesz obliczyć promień okręgu opisanego na czworokącie? Tak samo, jak promień okręgu opisanego na trójkącie, którego trzy wierzchołki są wierzchołkami danego czworokąta. Jakich twierdzeń możesz użyć do obliczenia promienia okręgu opisanego na trójkącie? Jakie wielkości muszą być ci znane?

Przydać się do tego może twierdzenie sinusów. Wystarczy np., że poznasz miarę kąta *CBD* i długość odcinka *CD*. Jak to zrobić? Zwróć uwagę na to, że odcinki *DC* i *DB* są równe, a kąty *DAC* i *DAB* są uzależnione tylko od miary kąta *CDB*.

Jeżeli mamy dwie niewiadome: miarę kąta *CBD* i długość odcinka *CD*, to możesz ułożyć układ równań z tymi dwiema niewiadomymi. Jakie to równania? Możesz wykorzystać np. dwa trójkąty *ADB* i *DAC* oraz twierdzenie cosinusów.

Zadanie 59.

Korzystając z tego, że pole trójkąta *CFG* jest równe sumie pól trójkątów *ADG* i *BEF*, ustal zależność między odcinkami *DE* i *EB*. W tym celu poprowadź wysokość w trójkącie *CFG* i uwzględnij przy tym zależność między trójkątami *ADG*, *BEF* i *CFG* (podobieństwo i przystawanie). Korzystając z trójkąta *BDG*, wyznacz tangens kąta *DBG*. Uzależnij kąt ostry, pod jakim przecinają się odcinki *DF* i *BG* od kąta *DBG* i kąta, jaki przekątna *DF* kwadratu tworzy z podstawą *DE*.

Zadanie 60.

Zauważ, że odcinki *OC* i *OB* zawierają się w dwusiecznych kątów *DCB* i *ABC* danego trapezu. Dlaczego suma miar tych kątów jest równa $180°$? W jaki sposób ta informacja i fakt, że odcinki *OC* i *OB* są dwusiecznymi odpowiednich kątów, pozwalają ci obliczyć miarę kąta *BOC*?

Jakie jest położenie odcinka *OP* względem boku *BC*? Jeśli wiesz, to rozumiesz także, czym jest odcinek *OP* dla trójkąta *BOC*. Teraz już możesz skorzystać z twierdzenia, które kwadrat długości odcinka *OP* pozwala wyrażać poprzez iloczyn długości odcinków, na które podzielił on bok *BC*. Jak długość boku *AD* ma się do $|OP|$? Teraz przypomnij sobie własność czworokąta opisanego na okręgu i wyraź cały jego obwód za pomocą p i q.

Zadanie 61.

W zadaniu można odszukać kilka par prostych równoległych. Jak je możesz wykorzystać?

Z jakimi twierdzeniami kojarzą się proste równoległe?

Oczywiście, chodzi o twierdzenie Talesa, ale możesz też dostrzec trójkąty podobne. Wypisz pary trójkątów podobnych. Które pary należy wybrać do rozwiązania? Jeżeli nie wiesz, sprawdź, jakie odcinki występują w tezie zadania. Wykorzystaj pary trójkątów, w których występują te odcinki.

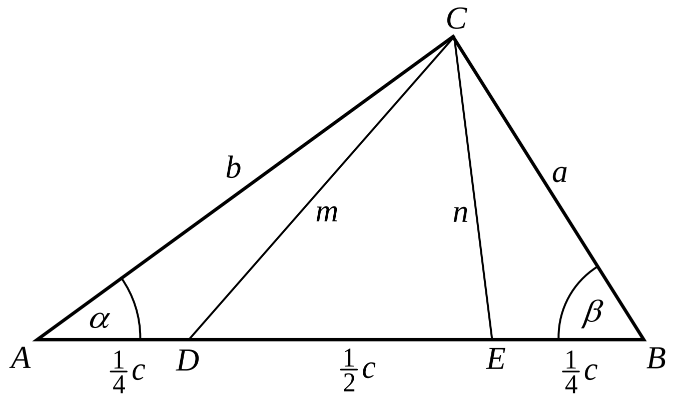
Jakie proporcje między odcinkami możesz ułożyć, wykorzystując wybrane pary trójkątów podobnych?

Doprowadź do równania, w którym występują wyłącznie odcinki z tezy zadania. Jak wyznaczyć związek między odcinkami *AB* i *CD*? Czy możesz przyjąć, że jedna wielkość jest zmienną, a druga daną i w ten sposób wyznaczyć zależność między nimi?

Czy wszystkie tak wyliczone zależności spełniają warunki zadania? Wybierz poprawną.

Zadanie 62.

Wygodnie jest przyjąć oznaczenia jak na rysunku.



Zwróć uwagę na „symetrię” dowodzonej równości. Możesz więc oczekiwać, że należy wykonywać też takie „symetryczne” kroki w dowodzie. Jeśli np. zastosujesz twierdzenie cosinusów dla kąta α w trójkątach *ADC* i *ABC*, uzyskując zależności między wielkościami m, a, b, c i $\cos\alpha$, to zastosuj też to samo twierdzenie dla kąta β w trójkątach *EBC* i *ABC*. W ten sposób otrzymasz dwie pary równości. Z jednej równości wyznacz $\cos\alpha$ i wstaw to do drugiej równości — otrzymasz zależność między wielkościami *m*, *a*, *b* i *c*, w której nie wystąpi już $\cos\alpha$. Analogicznie postąp z drugą parą równości — otrzymasz zależność między wielkościami *n*, *a*, *b* i *c*, w której nie wystąpi $\cos\beta$. Teraz z otrzymanych równości „pozbądź" się wielkości *c*.

Zadanie 63.

Dorysuj na rysunku odcinek *BD*. Który kąt wpisany w okrąg o_1 jest równy kątowi *CDB* (i dlaczego?). Wiesz, że punkty *A, B, E* są współliniowe. Który zatem kąt wpisany w okrąg o_2 jest równy kątowi *BAC*? Kąty *EAC* i *EFC* są oparte na tym samym łuku *EC*. Jakie mają miary? Czy oznacza to, że miary kątów *EFC* i *CDB* też muszą być równe? Z założenia wiadomo, że miary kątów *CDB* i *BFE* są równe. Czy wobec tego miary kątów *BFE* i *EFC* są równe? Co z tego wynika o punktach *F, B, C*?

Zadanie 64.

Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej danej w zadaniu. Jaki powinien być współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $(1,3)$ oraz $(3,-1)$, aby można było stwierdzić, że punkt $(1,3)$ spełnia warunki zadania?

Zadanie 65.

Narysuj zbiory określone w treści zadania za pomocą nierówności: koło i półpłaszczyznę. Przyjmij oznaczenia, np. niech *S* będzie środkiem okręgu $(x+1)^2+(y+1)^2=25$, punkty *A* i *B* — punktami wspólnymi tego okręgu i prostej $y=\frac{1}{7}x+2\frac{5}{7}$. Ustal teraz, jaką figurą jest część wspólna danego koła i półpłaszczyzny. Czy wiesz, jak należy obliczyć pole figury *F*? Jeśli nie, to zauważ, że możesz je wyrazić jako różnicę pola wycinka koła o promieniu $r=5$ i kącie *ASB* oraz pola trójkąta *ASB*. Wyznacz współrzędne punktów *A* i *B* przecięcia okręgu $(x+1)^2+(y+1)^2=25$ i prostej $y=\frac{1}{7}x+2\frac{5}{7}$. Jak możesz wykorzystać współrzędne punktów *A* i *B* do obliczenia pola trójkąta *ASB*? Czy jest to jakiś szczególny trójkąt? Teraz już łatwo policzysz zarówno pole trójkąta *ASB*, jak i pole wycinka *ASB* (jaką częścią koła będzie otrzymany wycinek?) i ostatecznie pole figury *F*.

Zadanie 66.

Korzystając z podanych równań okręgów, wyznacz ich środki, promienie oraz równanie prostej, do której należą. Jaka jest odległość między środkami danych okręgów? Jaka jest długość odcinka *AB*? Czy można obliczyć odległość szukanego środka tego odcinka od początku układu współrzędnych? Zauważ, że środek odcinka *AB* leży na prostej łączącej środki okręgów, zatem jego współrzędne muszą spełniać równanie tej prostej. Czy — wiedząc o tym — można już wyznaczyć współrzędne środka odcinka *AB*? Może przydałoby się tu twierdzenie Pitagorasa?

Możesz również — po wyznaczeniu równania prostej łączącej okręgi — wyznaczyć punkty *A* i *B* przecięcia tej prostej z okręgami. Uwzględnij to, że mają one leżeć na tej prostej. Następnie skorzystaj ze wzoru na współrzędne środka odcinka.

Zadanie 67.

Zauważ, że prosta $x = 0$ nie jest tutaj styczną, więc każdą z nich można przedstawić w postaci kierunkowej (uwzględnij przy tym to, że mają one przechodzić przez początek układu współrzędnych). Zamień ją na postać ogólną i skorzystaj ze wzoru na odległość punktu od prostej — dla prostych stycznych musi być ona równa promieniowi okręgu. Parametr ten możesz również wyznaczyć, korzystając z tego, że układ równań złożony z równania okręgu i równania prostej musi mieć jedno rozwiązanie.

Zadanie 68.

Odczytaj z równań okręgów ich środki i promienie. Zauważ, że promieniem drugiego z okręgów jest liczba $r_2 = |m|$, dla $m \neq 0$. Zastanów się, kiedy dwa okręgi mają jeden punkt wspólny, czyli są styczne. Ile jest takich przypadków? Jaka jest zależność pomiędzy odległością środków a sumą lub wartością bezwzględną z różnicy promieni okręgów stycznych? Podpowiem, że okręgi są styczne zewnętrznie, gdy odległość ich środków jest równa sumie długości promieni tych okręgów, natomiast są styczne wewnętrznie, gdy odległość ich środków jest równa wartości bezwzględnej z różnicy długości ich promieni. W poszczególnych przypadkach zapisz warunki styczności i rozwiąż otrzymane w ten sposób równania. Dla tak obliczonych wartości *m* napisz równania prostych przechodzących przez środki okręgów.

Zadanie 69.

Przyjmij, że środek odcinka *AB* ma współrzędne $C = (x, y)$. Zapisz związek pomiędzy współrzędnymi punktu *B* oraz punktu *C*. Wiesz, że punkt *B* należy do okręgu o podanym równaniu. Wykorzystaj ten fakt i uzasadnij tezę.

Zadanie 70.

Najpierw uzasadnij, że promień okręgu nie może być większy od przyprostokątnej trójkąta. Oznacza to, że okrąg dzieli trójkąt na dwie figury, z których jedna jest wycinkiem koła o szukanym promieniu i kącie *ACB* (miarę kąta możesz ustalić z własności podanego trójkąta). Wyznacz pole trójkąta i zapisz wzór na pole wycinka koła. Zgodnie z treścią zadania pole wycinka jest równe połowie pola trójkąta. Stąd wyznaczysz promień. Wystarczy już tylko, że skorzystasz z równania okręgu o danym środku i promieniu.

Zadanie 71.

Narysuj proste *KL* i *LM* w układzie współrzędnych. Zauważ, że odcinki *KL* i *KM* są przyprostokątnymi trójkąta *KLM*.

Możesz zapisać równanie prostej *KM* w postaci $y = \frac{3}{2}x + b$.

Zapisz wzór na pole tego trójkąta. Wiesz, że jego pole jest równe 13.

W jaki sposób możesz zapisać długości odcinków *KL* i *LM*? Zauważ, że odcinek *KL* jest równy odległości punktu *M* od prostej *KL*, a długość *KM* jest równa odległości punktu *M* od prostej *KL*. Skorzystaj ze wzoru na odległość punktu od prostej.

Jak możesz zapisać długości danych odcinków, tak by w zapisie wyrażeń występowała tylko zmienna *b*?

Otrzymane wyrażenia podstaw do wzoru na pole trójkąta. W ten sposób obliczysz wartość *b*, a to pozwoli wyznaczyć równanie prostej *KM*.

Zadanie 72.

Zapisz warunek prostopadłości dla danych prostych w postaci ogólnej i zauważ, że zmienną a możesz wyłączyć przed nawias. Otrzymane równanie ma dwa rozwiązania. Jakie? Sprawdź, że dla jednego z tych rozwiązań odpowiednie proste nie tworzą trójkąta (dwa boki byłyby wówczas równoległe).

Dla otrzymanego rozwiązania (odpowiedniej wartości parametru) zapisz równania obu prostych. Jakie są współrzędne punktów wspólnych tych prostych i osi Oy? Sprawdź, że odległość tych punktów, która jest długością podstawy odpowiedniego trójkąta, jest równa $\left|4a+\frac{4}{a}\right|$.

Zapisz i rozwiąż układ równań tych prostych. Sprawdź, że jedynym jego rozwiązaniem jest punkt $(4,0)$.

Zauważ, że warunki postawione w treści zadania prowadzą do równania $\frac{1}{2}\cdot\left|4a+\frac{4}{a}\right|\cdot 4=20$.

Czy fakt, że parametr a przyjmuje, zgodnie z treścią zadania, tylko wartości dodatnie, pozwala uprościć zapis równania? Pomnóż obie strony równania przez a i rozwiąż otrzymane równanie kwadratowe.

Zadanie 73.

Zauważ, że prosta styczna do okręgu ma z nim dokładnie jeden punkt wspólny. Ustal teraz, dla jakich k i l prosta $y=kx+l$ ma jeden punkt wspólny z okręgiem $(x-k)^2+(y-l)^2=m^2$. Aby wyznaczyć ten punkt, możesz rozwiązać układ równań (równanie prostej i równanie okręgu). Po przekształceniu otrzymasz równanie kwadratowe z niewiadomą x. Posiada ono jedno rozwiązanie, gdy wyróżnik trójmianu jest równy zero. Zapisz odpowiednie równanie. Po przyrównaniu go do zera otrzymasz zależność między k i l:

$$(-2k)^2-4\left(1+k^2\right)\left(k^2-m^2\right)=0.$$

Przekształć to równanie do postaci $\frac{k^4}{1+k^2}=m^2$.

Nie rozwiązując układu równań, możesz zauważyć, że prosta i okrąg mają jeden punkt wspólny, gdy odległość między tą prostą i środkiem okręgu jest równa jego promieniowi (skorzystaj wtedy ze wzoru na odległość punktu od prostej).

Zadanie 74.

Przekrojem tego graniastosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy AB i punkt K należący do krawędzi bocznej CF jest trójkąt równoramienny (czy wiesz, dlaczego?). Wykorzystując dane pole przekroju, oblicz wysokość przekroju. Wysokość ta jest jednocześnie przeciwprostokątną trójkąta, który posłuży ci do obliczenia długości odcinka CK (pomocne będzie twierdzenie Pitagorasa). Wiadomo, że punkt K dzieli krawędź boczną CF w stosunku 2:3. Czy zadanie będzie miało tylko jedno rozwiązanie? Wyznacz długość wysokości graniastosłupa i oblicz jego objętość.

Zadanie 75.

Pierwszym krokiem będzie określenie, jaką figurą jest powstały przekrój graniastosłupa.

Zauważ, że figurę, która jest przekrojem, możesz podzielić na dwa przystające trapezy równoramienne.

W treści zadania podano pole przekroju. Spróbuj zapisać pole przekroju za pomocą jednej niewiadomej, na przykład wysokości trapezu, i rozwiąż odpowiednie równanie. Obliczysz w ten sposób długość krótszej przekątnej graniastosłupa. Twoim zadaniem jest obliczenie objętości graniastosłupa, więc potrzebujesz jeszcze wysokości tej bryły.

Do wyznaczenia wysokości wykorzystaj wcześniej obliczoną długość krótszej przekątnej graniastosłupa. Jeśli nie wiesz, jak to zrobić, to spójrz jeszcze raz na rysunek i znajdź trójkąt prostokątny, którego bokami są wysokość graniastosłupa i jego krótsza przekątna. Trzecim bokiem trójkąta prostokątnego jest krótsza przekątna podstawy. Oblicz jej długość i napisz równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta. W ten sposób wyznaczysz wysokość graniastosłupa. Oblicz jego objętość.

Uwaga: Nie oczekujemy dowodu, że przekrój jest sumą mnogościową dwóch trapezów równoramiennych.

Zadanie 76.

Rozważ różne możliwe przekroje tego graniastosłupa płaszczyzną zawierającą krawędź AB podstawy graniastosłupa. Zaobserwuj, gdzie znajduje się punkt przecięcia płaszczyzny przekroju z prostą CF (punkt ten oznacz np. przez N). Spróbuj także ustalić, gdzie leży punkt N, gdy przekrój jest trapezem.

Zaznacz kąt α, o którym mowa w zadaniu, i zapisz $\mathrm{tg}\alpha$ w zależności od długości odcinka CN i wysokości podstawy graniastosłupa.

Zadanie 77.

Zwróć najpierw uwagę, że krawędź boczna AS jest prostopadła do płaszczyzn ABC i DEF, więc odległość między tymi płaszczyznami jest długością odcinka AD. Teraz powinieneś powiązać pola trójkątów ABC i DES z długością odcinka AD. Możesz na przykład zauważyć, że jeden z tych trójkątów jest obrazem drugiego w jednokładności, której środkiem jest wierzchołek S ostrosłupa. Jaka jest skala tej jednokładności? Jest nią z jednej strony stosunek długości odcinków AS i DS, a z drugiej strony trójkąty jednokładne są również podobne, więc skala ich podobieństwa to pierwiastek ze stosunku ich pól. Stąd otrzymasz zależność między długościami odcinków AS i DS oraz danymi polami trójkątów ABC i DEF.

Potrzebujesz jeszcze jednej zależności wiążącej jakieś dwie z tych wielkości, np. pole trójkąta DEF i długość odcinka DS. Możesz na przykład wziąć pod uwagę trójkąt DES. Zauważ, że jest on połową trójkąta równobocznego, więc łatwo możemy wyznaczyć długości odcinków DE i SE w zależności od długości odcinka DS.

Teraz zaobserwuj, że trójkąt EFS jest równoboczny, co oznacza, że odcinek EF ma taką samą długość jak odcinek SE.

Możesz już teraz wyrazić pole trójkąta DEF w zależności od długości odcinka DS. To jest właśnie druga z potrzebnych zależności. Z tych zależności wyznacz długość odcinka DS w zależności od pól trójkątów DEF i ABC.

Zadanie 78.

Zauważ, że otrzymany przekrój *EFGH* i czworokąt *BCGH* są trapezami o takich samych podstawach i różnych wysokościach (poprowadź je np. z wierzchołka *H*). Z danych zadania ustalisz stosunek tych wysokości. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznacz wysokość ściany bocznej. Następnie poszukaj trójkątów prostokątnych zawartych w ścianie bocznej, których jedną z przyprostokątnych będzie wysokość trapezu *BCGH* i wysokość ściany bocznej. Napisz odpowiednią proporcję wynikającą z ich podobieństwa. Otrzymasz w ten sposób zależność między krótszą podstawą czworokąta *BCGH* a jego wysokością. Zauważ, że kąt nachylenia tej wysokości do płaszczyzny podstawy ostrosłupa jest taki sam, jak kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do podstawy. Możesz stąd wyznaczyć cosinus tego kąta. Zastosuj twierdzenie cosinusów do trójkąta, którego bokami są wysokości obu czworokątów. Uzyskasz w ten sposób zależność między wysokością trapezu *EFGH* i jego krótszą podstawą. Ponieważ znasz już stosunek wysokości czworokątów i ich zależności tylko od wspólnej podstawy, to możesz ją teraz wyliczyć i wykorzystać otrzymany wynik do obliczenia wysokości trapezu *EFGH*, a następnie jego pola.

2.5. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Zadanie 81.

Zauważ, że przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω składa się z ciągów czteroelementowych o różnych wyrazach. Ponieważ każdy taki ciąg powstaje przez przestawianie podanych cyfr, to liczbę elementów zbioru Ω możesz wyznaczyć, korzystając ze wzoru na liczbę permutacji: $\overline{\overline{\Omega}} = 4!$

Zdarzeniem przeciwnym do opisanego w zadaniu jest otrzymanie liczby podzielnej przez 4, czyli takiej, w której liczba złożona z dwóch ostatnich cyfr danej liczby jest podzielna przez 4. W naszym przypadku chodzi więc o liczby: 12, 24, 32. W każdym przypadku pozostałe dwie cyfry można ustawić na dwa sposoby. Zatem wszystkich możliwości będzie $3 \cdot 2 = 6$. Oznacza to, że wszystkich liczb, które nie są podzielne przez 4, będzie $\overline{\overline{A}} = 4! - 6 = 18$. Teraz już możesz wykorzystać wzór na prawdopodobieństwo klasyczne: $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{18}{4!}$.

Zadanie 82.

Zastanów się, jakie reszty z dzielenia przez 3 dają kwadraty liczb naturalnych. Skoro suma kwadratów trzech liczb: *x, y, z* ma być podzielna przez 3, to jakie trójki liczb ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,100\}$ należy wziąć (biorąc pod uwagę reszty z dzielenia przez 3 ich kwadratów)? Otrzymujesz dwie możliwości: wszystkie trzy liczby *x, y, z* są podzielne przez 3 albo wszystkie trzy liczby *x, y, z* są niepodzielne przez 3.

W danym zbiorze $\{1,2,3,\ldots,100\}$ liczb podzielnych przez 3 jest 33, a liczb niepodzielnych przez 3 — 67.

Z treści zadania wynika, że tworzymy trójki (*x, y, z*). Ważna jest kolejność liczb i liczby mogą się powtarzać. Wobec tego prawidłowa odpowiedź to $33^3 + 67^3$.

Zadanie 83.

Na ile sposobów można wybrać cyfrę reprezentującą setki? Po wyborze takiej cyfry trzeba wybrać drugą cyfrę, różną od niej. Na ile sposobów można to zrobić? Na ile sposobów można dopełnić liczbę do liczby trzycyfrowej, spełniając warunki zadania?

Możesz również ustalić, na ile sposobów może dwukrotnie wystąpić dana cyfra w liczbie trzycyfrowej (na których miejscach może się znaleźć), a następnie ile jest możliwości wstawienia cyfry na wolne miejsce. Rozważ dwa przypadki: gdy powtarzająca się cyfra wystąpi na miejscu setek i gdy tam jej nie będzie. Pamiętaj o tym, że liczba trzycyfrowa nie może zaczynać się od zera.

Zadanie 84.

Rozpatrujemy wszystkie czteroelementowe podzbiory zbioru A. Zastanów się, ile w zbiorze A jest liczb parzystych, a ile nieparzystych. Wyznacz liczbę takich czteroelementowych podzbiorów zbioru A, których suma jest parzysta. Kiedy suma czterech liczb naturalnych jest liczbą parzystą? Rozpatrz trzy parami rozłączne możliwości, zapisz ich liczby za pomocą symbolu Newtona. Oznacz jako x liczbę wszystkich czteroelementowych podzbiorów zbioru A, których suma liczb jest parzysta. Analogicznie postępuj, wyznaczając y — liczbę takich czteroelementowych podzbiorów zbioru A, których suma liczb jest nieparzysta. W tym przypadku będą dwie wykluczające się możliwości. Zapisz różnicę $x-y$, rozwiń symbole Newtona i wykaż, że tak otrzymane wyrażenie jest równe $\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}$.

Zadanie 85.

Zauważ, że występują tu dwa zdarzenia, przy czym jedno z nich ma zajść pod warunkiem, że zajdzie drugie. Skorzystaj więc ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe. Aby to uczynić, musisz wyznaczyć prawdopodobieństwo części wspólnej obu zdarzeń oraz zdarzenia będącego tu warunkiem. Ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe wynika, że właściwie nie musisz dokładnie wyliczać liczby elementów całej przestrzeni zdarzeń elementarnych, natomiast musisz wyznaczyć liczbę elementów części wspólnej zdarzeń oraz tego, który jest warunkiem. Do wyznaczania tych liczb przyda ci się wzór na liczbę kombinacji (wybieramy pewną liczbę osób z danej grupy osób) oraz to, że dla alternatywy zdarzeń rozłącznych sumujemy liczby możliwości (osoby zostaną wybrane z jednej klasy albo z drugiej).

Zadanie 86.

Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Czy wiesz, ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych? Treść zadania sugeruje, że będziesz obliczać prawdopodobieństwo warunkowe. Zapisz oznaczenia zbiorów, np.: A — suma kwadratów wyrzuconych liczb przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, B — wartość bezwzględna różnicy wyrzuconych liczb będzie większa od 2. Twoim zadaniem jest obliczenie $P(B \mid A)$. Zgodnie z definicją

$$P(B \mid A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{|B\cap A|}{|A|}.$$

Zajmij się mocą zbioru A. Pomyśl, dla jakich dwóch liczb suma ich kwadratów przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1? Jeśli nie wiesz, to zastanów się, jakie reszty dają kwadraty liczb całkowitych przy dzieleniu przez 4? Jakie będą reszty dla liczb parzystych, a jakie dla nieparzystych? Teraz już możesz odpowiedzieć na pytanie, dla jakich dwóch liczb suma ich kwadratów przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1. Ile zatem będzie zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A? Zdarzenie $B \cap A$ polega na tym, że suma kwadratów obu liczb przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1 i wartość bezwzględna różnicy wyrzuconych oczek będzie większa od 2. Teraz wystarczy z elementów zbioru A wybrać te, dla których wartość bezwzględna różnicy wyrzuconych oczek jest większa od 2. Ile jest takich zdarzeń elementarnych? Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe.

Zadanie 87.

Wiesz, że $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ i masz obliczyć $\dfrac{P(A' \cap B)}{P(B)}$.

Przypomnij sobie, że $A' \cap B = B \setminus (A \cap B)$ i $A \cap B \subset B$. Stąd wynika, że

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B).$$

Liczniki obu dodatnich ułamków są równe. Co musisz stwierdzić, aby wykazać tezę?

Zadanie 88.

Twoim zadaniem jest obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Zauważ, że zdarzenie $A \cup B$ jest sumą trzech parami rozłącznych zdarzeń:

$$A \cup B = \left(A' \cap B\right) \cup \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap B'\right).$$

Jeżeli zdarzenia są parami rozłączne, to prawdopodobieństwo ich sumy jest równe sumie prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń. Zapisz prawdopodobieństwo sumy zdarzeń $P(A \cup B)$ i korzystając z danych, oblicz $P(A \cap B)$. Analogicznie obliczysz $P(B)$. Oblicz $P(A|B)$.

2.6. Rachunek różniczkowy

Zadanie 92.

Twoim zadaniem jest obliczenie granicy danej funkcji przy $x \to -\infty$. W tego typu granicach o wyniku decydują stopnie i współczynniki wielomianów znajdujących się w liczniku i mianowniku.

Wykonaj działania w liczniku i mianowniku. Wyłącz zmienną w najwyższej potędze przed nawias, skróć x w tej samej potędze i oblicz granicę powstałego wyrażenia. Poniżej znajdują się obliczenia:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(2x+1)^4 - \left(2x+3\right)^4}{(x+3)^3 - \left(3x-1\right)^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-64x^3 - 192x^2 - 208x - 80}{-26x^3 + 36x^2 + 18x + 28} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-64 - \frac{192}{x} - \frac{208}{x^2} - \frac{80}{x^3}}{-26 + \frac{36}{x} + \frac{18}{x^2} + \frac{28}{x^3}} = \frac{32}{13}.$$

Zadanie 93.

Podstaw liczbę 2 w miejsce *x*. Pozwoli to ocenić typ granicy, którą masz obliczyć. Zapewne otrzymałeś wyrażenie $\frac{0}{0}$. Oznacza to, że liczba 2 jest miejscem zerowym licznika i mianownika. Zapisz licznik i mianownik w postaci iloczynowej. Po uproszczeniu przez wspólny czynnik oblicz granicę.

Zadanie 94.

Zauważ, że możesz wyłączyć przed nawias wyrażenie x^2 jako wspólny czynnik w liczniku i mianowniku. Po skróceniu otrzymasz wyrażenie, które nie zależy od zmiennej *x* i jest granicą danej funkcji. Zapisz, że granica ta jest równa 2. Przekształć wyrażenie, co pozwoli ci wnioskować o wartości parametru *b*.

Zadanie 95.

Rozwiązywanie zadania rozpocznij od obliczenia pochodnej funkcji f : $f'(x) = -6x^2 + 6x$.

W jakim przedziale pochodna funkcji f jest dodatnia?

Zadanie 96.

Rozwiązanie zadania można rozpocząć od pytania: jakie znasz metody znajdowania ekstremów funkcji? Które z tych metod możesz zastosować do rozwiązania zadania?

Oblicz pochodną funkcji *f*. Jaki jest warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji? Co trzeba sprawdzić, aby w danym punkcie było maksimum?

Zadanie 97.

Rozpatrujemy ostrosłupy prawidłowe sześciokątne. Wprowadź oznaczenia, na przykład przyjmij, że *a* to długość krawędzi podstawy ostrosłupa, *x* — krótsza przekątna podstawy i *h* to wysokość ostrosłupa. Suma długości krótszej przekątnej podstawy i wysokości ostrosłupa jest równa 9, przy czym krótsza przekątna podstawy ma długość $a\sqrt{3}$ (czy wiesz, dlaczego?). Wykorzystaj tę informację i zapisz zależność między krótszą przekątną podstawy i wysokością ostrosłupa. Twoim zadaniem jest znalezienie wymiarów takiego ostrosłupa, który ma największą objętość, więc kolejnym krokiem będzie wyrażenie objętości *V* ostrosłupa za pomocą jednej z przyjętych zmiennych: *a* lub *h* (wygodniej za pomocą a). W ten sposób otrzymasz funkcję objętości ostrosłupa. Wyznacz jej dziedzinę.

Następnym etapem rozwiązania będzie analiza funkcji objętości ostrosłupa *V*. Funkcja ta, niezależnie od tego, czy wyrazisz ją za pomocą zmiennej *a*, czy *h*, jest wielomianem stopnia trzeciego. Oznacza to, że do wyznaczenia jej wartości największej musisz wykorzystać rachunek pochodnych. Jeśli nie masz pewności, co należy zrobić, oblicz pochodną funkcji *V*, miejsca zerowe pochodnej, zbadać znak pochodnej i na tej podstawie określić monotoniczność funkcji *V*, wyznaczyć argumenty należące do dziedziny, dla których funkcja *V* posiada ekstrema, i uzasadnić, że wyznaczone ekstremum jest największą wartością funkcji *V* w jej dziedzinie. Dla wygody możesz analizować funkcję w zbiorze liczb rzeczywistych (nazwij ją wtedy inaczej, na przykład *f*) i dopiero potem ograniczyć ten zbiór do dziedziny funkcji *V*. Ostatecznie oblicz wymiary ostrosłupa o największej objętości i tę największą objętość.

Zadanie 98.

Przyjmij, że $f(x)=2x^3-3x^2-5$ jest funkcją określoną dla wszystkich liczb rzeczywistych.

Funkcja *f* jest wielomianem, który jest funkcją ciągłą i różniczkowalną. Zauważ, że $f(2)=-1<0$, $f(3)=22>0$.

Skorzystaj z twierdzenia, które mówi, że jeżeli funkcja *f* jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a,b\rangle$ i $f(a)\cdot f(b)<0$, to w przedziale otwartym (a,b) funkcja *f* ma **co najmniej jedno** miejsce zerowe. Przyjmij, że (a,b) to $(2,3)$. Co wynika z podanego twierdzenia dla naszej funkcji?

Jak wykazać, że funkcja *f* ma w przedziale $(2,3)$ dokładnie jedno miejsce zerowe?

Zbadaj monotoniczność funkcji *f* w przedziale $(2,3)$.

Jaki jest związek między monotonicznością funkcji w przedziale a znakiem jej pochodnej w tym przedziale?

Ile dokładnie miejsc zerowych ma funkcja *f* w przedziale $(2,3)$?

To ile rozwiązań ma równanie $2x^3-3x^2-5=0$ w tym przedziale?

Zadanie 99.

Skorzystaj z własności pochodnej wielomianu: jeżeli w danym przedziale otwartym pochodna jest dodatnia, to funkcja jest w tym przedziale, również domkniętym, rosnąca. Oblicz więc pochodną podanej funkcji i rozwiąż odpowiednią nierówność. Rozwiązaniem będzie pewien przedział, którego jeden z końców będzie zależny od *k*. Wystarczy teraz, że porównasz go z przedziałem podanym w zadaniu, by wyznaczyć *k*.

Zadanie 100.

Zauważ, że dziedziną podanej funkcji jest cały zbiór liczb rzeczywistych, zatem jest ona określona w każdym punkcie danego przedziału. Wartości najmniejszej i największej musisz więc poszukać na końcach przedziału oraz w tych punktach jego wnętrza, dla których pochodna się zeruje. Pochodną podanej funkcji oblicz, korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu, i wyznacz jej miejsca zerowe. Oblicz wartości funkcji *f* w miejscach zerowych pochodnej (należących do danego przedziału) oraz dla końców przedziału. Porównaj otrzymane liczby i wybierz z nich największą i najmniejszą.

3. Rozwiązania

3.1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności

Zadanie 3.

Stosując wzory skróconego mnożenia na sumę sześcianów i różnicę sześcianów, możemy nierówność zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{(x-y)(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{(x+y)(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}>\frac{1}{3},$$

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}>\frac{1}{3}.$$

Ponieważ $x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2>0$, gdyż $x\neq -y$, to mnożąc obie strony nierówności przez $3\left(x^2+xy+y^2\right)$, otrzymujemy nierówność równoważną

$$3x^2-3xy+3y^2>x^2+xy+y^2,$$

$$2x^2-4xy+2y^2>0,$$

$$x^2-2xy+y^2>0,$$

$$(x-y)^2>0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż $x\neq y$, a kwadrat liczby różnej od zera jest dodatni.

To kończy dowód.

Zadanie 4.

Zauważmy, że pierwiastkami równania są liczby $-1, 1$ oraz $-m, m$ (oczywiście $m\neq 0$, w przeciwnym bowiem razie mielibyśmy ciąg trzywyrazowy).

Przyjmijmy, że $-m<0<m$ (założenie, że $m>0$, nie stanowi żadnego ograniczenia w rozwiązaniu, bowiem liczby $-m, m$ są wzajemnie przeciwne; należy także zauważyć, że jeśli szukaną wartością parametru jest liczba m, warunki zadania są spełnione także dla liczby $-m$).

Mogą zachodzić dwa przypadki:

$$-m<-1<1<m \tag{1}$$

lub

$$-1<-m<m<1. \tag{2}$$

Rozwiązania te tworzą ciąg arytmetyczny, zatem w szczególności:

— dla (1) mamy $m-1=1-(-1)$, czyli $m=3$;

— dla (2) mamy $1-m=m-(-m)$, czyli $m=\frac{1}{3}$.

Warunki zadania są spełnione dla parametrów: $\pm\frac{1}{3}, \pm 3$.

Zadanie 5.

A

Zadanie 6.

Zauważmy, że

$$\log_4 9=\frac{\log_5 9}{\log_5 4}=\frac{\log_5 3^2}{\log_5 2^2}=\frac{2\log_5 3}{2\log_5 2}=\frac{\log_5 3}{\log_5 2}.$$

Stąd

$$\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2=\log_3 5\cdot\frac{\log_5 3}{\log_5 2}\cdot\log_5 2=\log_3 5\cdot\log_5 3.$$

Korzystając ze wzoru na zmianę podstawy logarytmu $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, stwierdzamy, że

$$\log_3 5\cdot\log_5 3=1.$$

Zadanie 7.

C

Zadanie 8.

Oznaczmy przez x najmniejszą z trzech szukanych liczb całkowitych. Zapiszemy równanie wynikające z treści zadania:

$$x(x+1)(x+2)=6(x^2+1).$$

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$x(x^2+3x+2)=6x^2+6,$$

$$x^3+3x^2+2x=6x^2+6,$$

$$x^3-3x^2+2x-6=0,$$

$$x^2(x-3)+2(x-3)=0,$$

$$(x-3)(x^2+2)=0.$$

Z tego wynika, że warunki zadania są spełnione dla $x=3$. Zatem szukane liczby to 3, 4, 5.

Zadanie 9.

Zapiszmy wielomian $x^3 - 2x + 1$ w postaci:

$$x^3 - 2x + 1 = (x-a)(x-b)(x-c).$$

i wykonajmy działania:

$$x^3 - 2x + 1 = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc.$$

Wielomiany są równe, gdy maja równe współczynniki przy odpowiednich potęgach. Wobec tego:

$$a+b+c=0,\ ab+bc+ca=-2,\ abc=-1.$$

Ponieważ

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca),$$

to

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 0 + 4 = 4.$$

Zadanie 10.

Zauważmy, że równanie $k^2 x - 1 = x(3k-2) - k$ można zapisać w postaci

$$x\left(k^2 - 3k + 2\right) = 1 - k.$$

Po przekształceniu trójmianu $k^2 - 3k + 2$ do postaci iloczynowej otrzymujemy

$$x(k-1)(k-2) = 1 - k.$$

Zauważmy, że dla $k \neq 1$ oraz $k \neq 2$ otrzymujemy

$$x = \frac{1-k}{(k-1)(k-2)} = \frac{-1}{k-2} = \frac{1}{2-k}.$$

Dla $k=1$ mamy: $x(1-1)(1-2) = 1-1$, czyli $0=0$ — każda liczba jest rozwiązaniem, więc równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Dla $k=2$ mamy: $x(2-1)(2-2) = 1-2$, czyli $0=-1$ — równanie nie ma rozwiązań.

Zatem dla każdej wartości parametru z wyłączeniem 2 równanie ma rozwiązanie.

Zadanie 11.

B

Zadanie 12.

Załóżmy, że $x \geq 1$. Wówczas równanie przyjmuje postać $|x-2|=|x-2|$ i jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą (większą lub równą 1).

Gdy $x<1$, otrzymujemy równanie $|x|=|x-2|$, skąd mamy $x=x-2$ lub $x=2-x$.

W pierwszym przypadku mamy sprzeczność, w drugim otrzymujemy rozwiązanie $x=1$, sprzeczne z założeniem $x<1$.

Tak więc $||x-1|-1|=|x-2|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \geq 1$.

Uwaga: Możesz również narysować wykresy funkcji $||x-1|-1|$ oraz $|x-2|$ i odczytać z nich, gdzie wykresy się pokrywają.

Zadanie 13.

I sposób

Rozwiążemy nierówność w każdym z przedziałów wyznaczonych na osi liczbowej przez argumenty, dla których $|2x-2|=0$ oraz $|x|=0$.

Ponieważ $2x-2=0$ dla $x=1$, więc to liczby 0 i 1 wyznaczają podział. Rozważymy naszą nierówność w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$, $\langle 0,1)$ oraz $\langle 1,+\infty)$.

- Rozważmy nierówność $|2x-2| \geq x+|x|$ dla $x \in (-\infty, 0)$.

  Otrzymujemy wówczas, że $|x|=-x$ oraz $|2x-2|=-(2x-2)$, a nierówność przyjmuje postać $-(2x-2) \geq x+(-x)$. Jej rozwiązaniem są liczby spełniające warunek: $x \leq 1$. Ponieważ rozważamy nierówność dla $x \in (-\infty, 0)$, to otrzymujemy: $x \in (-\infty, 0)$.

- Rozważmy teraz nierówność na przedziale $\langle 0, 1)$.

  Otrzymujemy wówczas, że $|x|=x$ oraz $|2x-2|=-(2x-2)$ i nierówność przyjmuje postać $-(2x-2) \geq x+x$. Zatem $x \leq \frac{1}{2}$. Ponieważ rozważamy nierówność dla $x \in \langle 0, 1)$, to otrzymujemy: $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$.

- Rozważmy teraz nierówność na przedziale $\langle 1, +\infty)$.

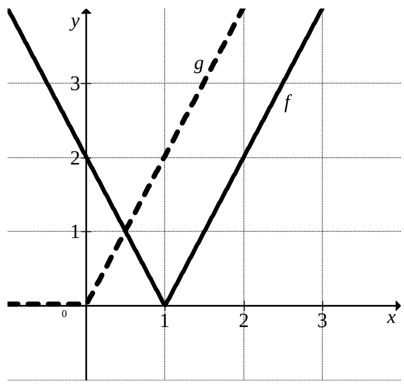
  Otrzymujemy wówczas, że $|x|=x$ oraz $|2x-2|=2x-2$ i nierówność przyjmuje postać $2x-2 \geq x+x$. Zatem $-2 \geq 0$. Nierówność ta jest sprzeczna.

Rozwiązaniem nierówności jest suma rozwiązań w przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $\langle 0, 1)$, czyli $x \in (-\infty, 0) \cup \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$. Zatem $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2} \right\rangle$.

II sposób

Zapiszmy nierówność w postaci $|2x-2| \geq x+|x|$.

Naszkicujmy wykresy funkcji $f(x)=|2x-2|$ oraz $g(x)=x+|x|$.



Z rysunku odczytujemy współrzędne punktu wspólnego obu wykresów: $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ — możemy sprawdzić, że istotnie dla argumentu równego $\frac{1}{2}$ wartości obu funkcji są równe 1. Zatem rozwiązaniem nierówności są wszystkie liczby ze zbioru $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$.

Zadanie 14.

I sposób

Wykorzystujemy własności wartości bezwzględnej: $|a|+|b| \geq |a+b|$ oraz $|a|=|-a|$:

$$|x+5|+|x-2|=|x+5|+|2-x| \geq |x+5+2-x|=|7|=7.$$

Zatem wykazaliśmy, że nierówność $|x+5|+|x-2| \geq 7$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej.

II sposób

Rozpatrujemy nierówność w trzech następujących przedziałach:

- $x \in (-\infty, -5\rangle$

  $-x-5-x+2 \geq 7$

  $x \leq -5$

  Uwzględniając założenie, wnioskujemy, że każda liczba rzeczywista z przedziału $(-\infty, -5\rangle$ spełnia nierówność $|x+5|+|x-2| \geq 7$.

- $x \in (-5, 2)$

  $x+5-x+2 \geq 7$

  $7 \geq 7$

Uwzględniając założenie, wnioskujemy, że każda liczba rzeczywista z przedziału $(-5, 2)$ spełnia nierówność $|x+5|+|x-2| \geq 7$.

- $x \in \langle 2, +\infty)$

  $x+5+x-2 \geq 7$

  $x \geq 2$

  Uwzględniając założenie, wnioskujemy, że każda liczba rzeczywista z przedziału $\langle 2, +\infty)$ spełnia nierówność $|x+5|+|x-2| \geq 7$.

Nierówność $|x+5|+|x-2| \geq 7$ jest prawdziwa w każdym z trzech rozpatrywanych przedziałów, zatem wykazaliśmy jej prawdziwość dla każdej liczby rzeczywistej.

Zadanie 15.

B

Zadanie 16.

B

Zadanie 17.

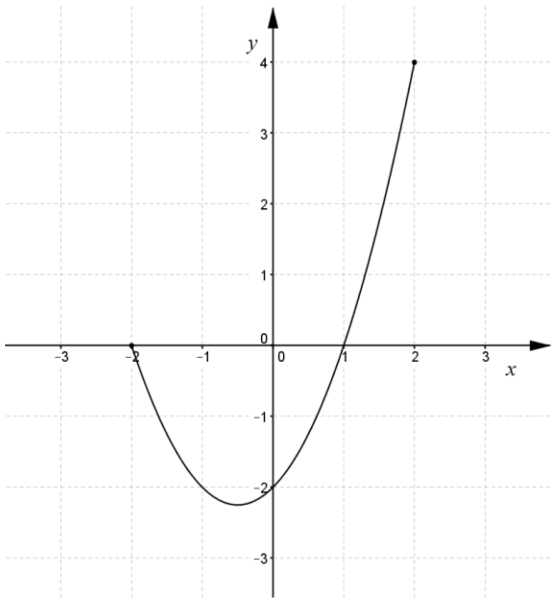
C

Zadanie 18.

Dla $m=0$ równanie przyjmuje postać: $-1=0$, czyli nie ma rozwiązań.

Dla $m \neq 0$ równanie jest kwadratowe i możemy je zapisać w postaci: $m(x^2+x-2)=1$, czyli $x^2+x-2=\dfrac{1}{m}$.

Narysujmy wykres funkcji $f(x)=x^2+x-2$ dla $x \in \langle -2, 2 \rangle$.



Zauważmy, że prosta o równaniu $y=\frac{1}{m}$ ma jeden punkt wspólny z wykresem funkcji wtedy i tylko wtedy, gdy $0<\frac{1}{m}\leq f(2)$ lub $\frac{1}{m}=-\frac{9}{4}$, czyli $m\geq\frac{1}{4}$ lub $m=-\frac{4}{9}$.

Prosta o równaniu $y=\frac{1}{m}$ ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji wtedy i tylko wtedy, gdy $-\frac{9}{4}<\frac{1}{m}\leq 0$, czyli $m<-\frac{4}{9}$.

Prosta o równaniu $y=\frac{1}{m}$ nie ma punktów wspólnych z wykresem funkcji wtedy i tylko wtedy, gdy $-\frac{4}{9}<m<0$ lub $0<m<\frac{1}{4}$.

Odpowiedź: Równanie $mx^2+mx-1-2m=0$ dla $x\in\langle -2, 2\rangle$:

— nie ma rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy $-\frac{4}{9}<m<\frac{1}{4}$,

— ma jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $m\geq\frac{1}{4}$ lub $m=-\frac{4}{9}$,

— ma dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $m<-\frac{4}{9}$.

Zadanie 19.

I sposób

Dla $m=1$ wykresem funkcji f jest prosta o równaniu $y=-2x$, która przecina się z prostą o równaniu $y=-x+1$ w jednym punkcie, więc dla $m=1$ nie są spełnione warunki zadania.

Dla $m\neq 1$ wykresem funkcji f jest parabola, która ma z prostą o równaniu $y=-x+1$ dwa punkty wspólne, gdy równanie $(m-1)x^2-2x-m+1=-x+1$ ma dwa rozwiązania.

Przekształcając je równoważnie, otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$(m-1)x^2-x-m=0$$

Wyznaczamy wyróżnik: $\Delta=4m^2-4m+1=(2m-1)^2$.

Rozważane równanie ma dwa rozwiązania x_1, x_2, gdy $\Delta>0$, czyli dla $m\in R\setminus\left\{\frac{1}{2},1\right\}$.

Rozwiązania x_1, x_2 mają przeciwne znaki, gdy $x_1\cdot x_2<0$. Korzystając ze wzoru Viète'a, możemy zapisać:

$$x_1\cdot x_2=\frac{-m}{m-1},$$

zatem

$$\frac{m}{m-1} > 0.$$

Nierówność jest prawdziwa dla $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Z tego wynika, że wykres funkcji $f(x) = (m-1)x^2 - 2x - m + 1$ przecina się z prostą o równaniu $y = -x + 1$ w dwóch punktach, których pierwsze współrzędne mają przeciwne znaki, gdy $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

II sposób

Dla $m = 1$ wykresem funkcji f jest prosta o równaniu $y = -2x$, która przecina się z prostą o równaniu $y = -x + 1$ w jednym punkcie, czyli dla parametru $m = 1$ nie są spełnione warunki zadania.

Dla $m \neq 1$ wyznaczamy pierwsze współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji f z prostą o równaniu $y = -x + 1$:

$$(m-1)x^2 - 2x - m + 1 = -x + 1,$$

$$mx^2 - m - x^2 - x = 0,$$

$$m(x-1)(x+1) - x(x+1) = 0,$$

$$(x+1)(mx - m - x) = 0,$$

$$x = -1 \quad \text{lub} \quad x = \frac{m}{m-1}.$$

Ponieważ $x = -1 < 0$, to $x = \frac{m}{m-1} > 0$. Z tego wynika, że $m(m-1) > 0$, czyli

$$m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty).$$

Zadanie 20.

Oznaczmy przez x_1, x_2 pierwiastki tego trójmianu.

Korzystając ze wzorów Viète'a, mamy:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{1} = -b,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{1} = c.$$

Sumę $1 + b + c$ możemy więc zapisać w postaci:

$$1 + b + c = 1 - x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2 = (1 - x_1) \cdot (1 - x_2).$$

Zauważmy, że aby iloczyn $p \cdot q$ liczb całkowitych był liczbą pierwszą, to jedna z tych liczb musi być równa 1 lub -1.

Iloczyn $(1 - x_1) \cdot (1 - x_2)$ jest liczbą pierwszą i każda z liczb $1 - x_1, 1 - x_2$ jest całkowita, więc korzystając z powyższej uwagi, otrzymujemy, że jedna z nich musi być równa 1 lub -1.

Przypuśćmy, że $1-x_1=1$, wtedy mielibyśmy, że $x_1=0$, co jest sprzeczne z warunkami zadania.

Przypuśćmy, że $1-x_1=-1$, wtedy otrzymujemy, że $x_1=2$.

Trójmianem, który spełnia warunki zadania, jest na przykład: x^2-6x+8.

Zadanie 21.

I sposób

Przekształcamy daną nierówność do postaci

$$8x^2-4mx+2m^2-12x-6m+18\geq 0.$$

Stosujemy odpowiednie grupowanie:

$$4x^2-12x+9+4x^2-4mx+m^2+m^2-6m+9\geq 0,$$

$$(2x-3)^2+(2x-m)^2+(m-3)^2\geq 0.$$

Zauważamy, że:

$(2x-3)^2\geq 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x,

$(2x-m)^2\geq 0$ dla każdych liczb rzeczywistych x i m,

$(m-3)^2\geq 0$ dla każdej liczby rzeczywistej m.

Stąd $(2x-3)^2+(2x-m)^2+(m-3)^2\geq 0$ dla każdych liczb rzeczywistych x i m.

Zatem wykazaliśmy, że dla każdych liczb rzeczywistych x i m prawdziwa jest nierówność

$$8x^2-4mx+2m^2\geq 12x+6m-18.$$

II sposób

Przekształcamy daną nierówność do postaci

$$8x^2-4mx+2m^2-12x-6m+18\geq 0,$$

$$8x^2-(4m+12)x+2m^2-6m+18\geq 0.$$

Lewą stronę nierówności traktujemy jako trójmian kwadratowy zmiennej x z parametrem m:

$$\Delta=16m^2+96m+144-64m^2+192m-576=-48m^2+288m-432=-48\left(m^2-6m+9\right),$$

$$\Delta=-48\left(m^2-6m+9\right)=-48\left(m-3\right)^2.$$

Rozważany trójmian kwadratowy $8x^2-(4m+12)x+2m^2-6m+18$ ma dodatni współczynnik przy x^2 oraz niedodatni wyróżnik.

Z powyższych rozważań wynika, że nierówność $8x^2-4mx+2m^2\geq 12x+6m-18$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m.

Zadanie 22.

C

Zadanie 23.

C

Zadanie 24.

Ponieważ wielomian W jest podzielny przez dwumian $2x+1$, to $-\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem tego wielomianu, czyli

$$W\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x-2$ jest równa 105, zatem $W(2)=105$.

Wyznaczamy wartości współczynników a i b.

Ponieważ $W\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ oraz $W(2)=105$, to możemy zapisać układ równań:

$$\begin{cases} 4\cdot\left(-\frac{1}{32}\right)+a\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)+b\cdot\frac{1}{4}+1=0 \\ 128+8a+4b+1=105 \end{cases}$$

Przekształcamy układ równań równoważnie:

$$\begin{cases} a-2b=7 \\ 4a+2b=-12 \end{cases}$$

Z tego wynika, że $a=-1$ oraz $b=-4$, zatem wielomian W jest określony wzorem

$$W(x)=4x^5-x^3-4x^2+1.$$

Rozkładamy wielomian na czynniki:

$$W(x)=4x^5-x^3-4x^2+1,$$

$$W(x)=x^3\left(4x^2-1\right)-\left(4x^2-1\right),$$

$$W(x)=\left(4x^2-1\right)\left(x^3-1\right),$$

$$W(x)=(2x-1)(2x+1)(x-1)\left(x^2+x+1\right).$$

Pierwiastki wielomianu W: $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1.

Zadanie 25.

Zauważmy, że

$$x^3+2\sqrt{2}=x^3+\left(\sqrt{2}\right)^3=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2-\sqrt{2}\cdot x+2\right).$$

Równanie $3\left(x+\sqrt{2}\right)=x^3+2\sqrt{2}$ możemy kolejno przekształcić w sposób równoważny:

$$3\left(x+\sqrt{2}\right)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2-\sqrt{2}\cdot x+2\right),$$

$$\left(x+\sqrt{2}\right)\left[3-\left(x^2-\sqrt{2}\cdot x+2\right)\right]=0,$$

$$\left(x+\sqrt{2}\right)\left(-x^2+\sqrt{2}\cdot x+1\right)=0.$$

Otrzymane równanie jest równoważne alternatywie:

$$x+\sqrt{2}=0 \quad \text{lub} \quad -x^2+\sqrt{2}\cdot x+1=0.$$

Rozwiązaniem pierwszego z tych równań jest liczba $-\sqrt{2}$.

Wyróżnik drugiego równania jest równy:

$$\Delta=2-4\cdot(-1)=6,$$

więc

$$x_1=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}, \quad x_2=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{-2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}.$$

Uwaga: Łatwo zauważyć, że liczba $-\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem równania $3\left(x+\sqrt{2}\right)=x^3+2\sqrt{2}$. Można więc wielomian $x^3-3x-\sqrt{2}$ podzielić przez dwumian $x-\left(-\sqrt{2}\right)$.

Zadanie 26.

Równanie $\left(x^2-3x\right)\left(x^2-3x+2\right)+1=0$ możemy zapisać w postaci równoważnej:

$$\left(x^2-3x\right)^2+2\left(x^2-3x\right)+1=0,$$

$$\left(x^2-3x+1\right)^2=0.$$

To równanie jest z kolei równoważne równaniu kwadratowemu $x^2-3x+1=0$, które ma dwa rozwiązania: $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ lub $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Uwaga: Możemy też oznaczyć $t=x^2-3x$ i wtedy równanie $\left(x^2-3x\right)\left(x^2-3x+2\right)+1=0$ możemy zapisać w postaci $t(t+2)+1=0$. Dalej mamy $t^2+2t+1=0$, $(t+1)^2=0$. Stąd $t=-1$. Wracając do przyjętego oznaczenia, otrzymujemy równanie kwadratowe $x^2-3x=-1$. To równanie jest równoważne równaniu kwadratowemu $x^2-3x+1=0$, które ma dwa rozwiązania: $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ lub $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Zadanie 27.

Wyznaczamy pierwsze współrzędne punktów wspólnych wykresów funkcji f i w:

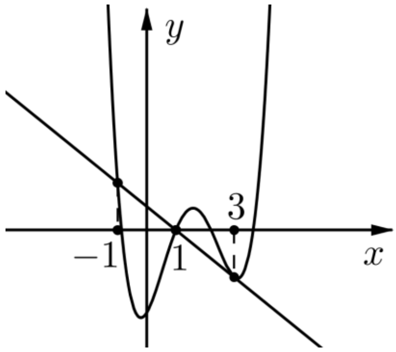
$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x - 7 = -2x + 2.$$

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0,$$
$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - x^2 + 6x - 9 = 0,$$
$$x^2\left(x^2 - 6x + 9\right) - \left(x^2 - 6x + 9\right) = 0,$$
$$\left(x^2 - 6x + 9\right)\left(x^2 - 1\right) = 0,$$
$$\left(x - 3\right)^2\left(x^2 - 1\right) = 0.$$

Powyższe równanie jest spełnione, gdy $(x-3)^2 = 0$ lub $x^2 - 1 = 0$, zatem $x = 3$ lub $x = -1$, lub $x = 1$.

Z tego wynika, że istnieją dokładnie trzy punkty wspólne wykresów f i w (zobacz rysunek).



Z rysunku odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności $w(x) \geq f(x)$: $x \in \left(-\infty; -1\right\rangle \cup \left\langle 1; +\infty\right)$.

Zadanie 28.

Wyznaczamy miejsca zerowe wielomianu W. Ponieważ wielomian W jest podzielny przez dwumian $\frac{1}{2}x + 2$, to -4 jest jednym z miejsc zerowych wielomianu W.

Dzielimy wielomian W przez dwumian $\frac{1}{2}x + 2$:

$$\left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - 6x + 8\right) : \left(\frac{1}{2}x + 2\right) = x^3 - x^2 - 4x + 4.$$

Pozostałe miejsca zerowe wielomianu W są rozwiązaniami równania:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0.$$

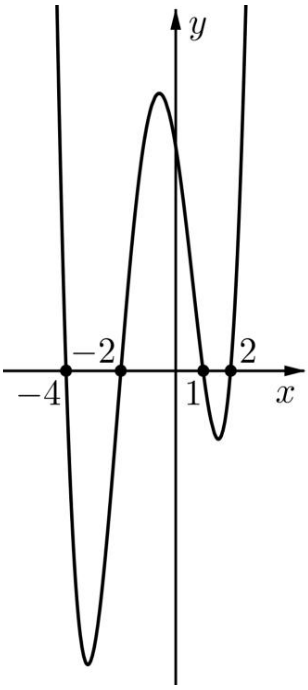
Przekształcamy równanie równoważnie:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0,$$
$$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0,$$

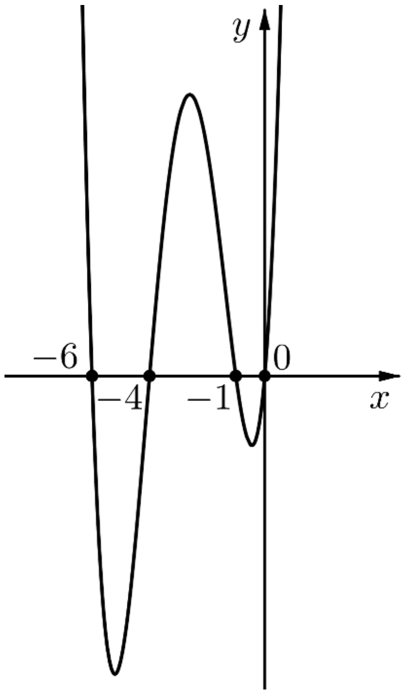
$$(x-1)(x^2-4)=0.$$

Z tego wynika, że $x=1$ lub $x=2$, lub $x=-2$.

Na rysunku zaznaczamy miejsca zerowe wielomianu W (zobacz *Rysunek 1.*).



Rysunek 1.



Rysunek 2.

Wykres wielomianu $W(x+2)$ powstaje przez przesunięcie wykresu wielomianu W o dwie jednostki w lewo (zobacz *Rysunek 2.*).

Zbiorem rozwiązań nierówności $W(x+2)\geq 0$ jest $\left(-\infty,-6\right\rangle\cup\left\langle -4,-1\right\rangle\cup\left\langle 0,+\infty\right)$.

Zadanie 29.

Przekształcamy wzór funkcji g:

$$g(k)=2\cdot k^3-(k-2)^3=2k^3-k^3+6k^2-12k+8=k^3+6k^2-12k+8.$$

Wartość funkcji g jest równa 80 dla k spełniających równanie $k^3+6k^2-12k+8=80$.

Tak więc

$$k^3+6k^2-12k-72=0,$$

$$k^2(k+6)-12(k+6)=0,$$

$$(k^2-12)(k+6)=0,$$

$$(k-2\sqrt{3})(k+2\sqrt{3})(k+6)=0,$$

$$k=2\sqrt{3} \quad \text{lub} \quad k=-2\sqrt{3}, \quad \text{lub } k=-6.$$

Wynika z tego, że $g(k)=80$ dla argumentów $k=2\sqrt{3}$, $k=-2\sqrt{3}$ oraz $k=-6$.

Zadanie 30.

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap: wyznaczenie współczynników liczbowych a i b funkcji kwadratowej f.

Funkcja f jest funkcją kwadratową, zatem $a \neq 0$.

Ponieważ funkcja f osiąga najmniejszą wartość dla argumentu 4, to $-\frac{b}{2a} = 4$. Ponadto $f(4) = -22$. Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{cases} b = -8a \\ 16a + 4b - 6 = -22 \end{cases}$$

Powyższy układ równań spełnia tylko jedna para liczb: $a = 1$ i $b = -8$, zatem równanie ma postać $x^3 + x^2 - 8x - 6 = 0$.

Uwaga: Równanie $b = -8a$ można otrzymać również, korzystając z własności pochodnej funkcji.

Współczynniki liczbowe a i b można wyznaczyć także, zapisując wzór funkcji kwadratowej f w postaci kanonicznej: $f(x) = a(x-4)^2 - 22$. Następnie trzeba przekształcić ten wzór do postaci ogólnej i porównać odpowiednie współczynniki.

Drugi etap: rozwiązanie równania $x^3 + x^2 - 8x - 6 = 0$.

Jednym z rozwiązań równania jest liczba -3, zatem wielomian $W(x) = x^3 + x^2 - 8x - 6$ jest podzielny przez dwumian $x + 3$.

Dzielimy wielomiany: $(x^3 + x^2 - 8x - 6):(x+3) = x^2 - 2x - 2$.

Pozostałe rozwiązania równania $x^3 + x^2 - 8x - 6 = 0$ są pierwiastkami trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x - 2$: $x = 1 - \sqrt{3}$ lub $x = 1 + \sqrt{3}$.

3.2. Funkcje

Zadanie 33.

I sposób

Zauważmy, że okresem zasadniczym funkcji $\sin(\pi a x)$ jest liczba $\frac{2}{a}$ i funkcja ta dokładnie jeden raz w okresie przyjmuje wartość 1, dla argumentu $x = \frac{1}{2a} + \frac{2k}{a}$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Dla $k = 0$ mamy $x = \frac{1}{2a} + \frac{2 \cdot 0}{a} = \frac{1}{2a}$. Widać, że $0 < \frac{1}{2a} < \frac{1}{a}$ (ponieważ $a > 0$, to otrzymane nierówności są równoważne nierównościom $0 < \frac{1}{2} < 1$).

Pokażemy, że dla całkowitych wartości $k \neq 0$ liczby postaci $x = \frac{1}{2a} + \frac{2k}{a}$ nie mieszczą się w przedziale $\left\langle 0, \frac{1}{a} \right\rangle$.

Rzeczywiście, dla $k < 0$ i $a > 0$ mamy $\frac{1}{2a} + \frac{2k}{a} = \frac{1}{2a}(1 + 4k) \leq \frac{-3}{2a} < 0$.

Z kolei dla $k \geq 1$ mamy $\frac{1}{2a} + \frac{2k}{a} > \frac{1}{a}$, co jest równoważne nierówności $\frac{1}{2} + 2k > 1$ prawdziwej dla wszystkich liczb $k > \frac{1}{4}$.

Zatem tylko dla $k = 0$ spełnione są warunki zadania.

II sposób

Ponieważ $\sin(\pi a x) = 1$, to $\pi a x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, stąd $x = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} + 2k\right)$, $k \in C$. Ponieważ $a > 0$ i musi być spełniony warunek $x \geq 0$, to $\frac{1}{2} + 2k \geq 0$, stąd $k \geq -\frac{1}{2}$. Ponadto musi być $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} + 2k\right) \leq \frac{1}{a}$, stąd $k \leq \frac{1}{4}$. Po uwzględnieniu tego, że k jest liczbą całkowitą, otrzymujemy $k = 0$.

Zadanie 34.

Wyznaczamy wszystkie liczby spełniające równanie: $\sin x + \sin 3x = 0$. Przekształcamy równanie równoważnie, korzystając ze wzoru na sumę sinusów: $2\sin 2x \cos x = 0$. Równanie to jest spełnione, gdy $\sin 2x = 0$ lub $\cos x = 0$, czyli dla $x = \frac{k\pi}{2}$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Najmniejszą liczbą dodatnią spełniającą równanie $\sin x + \sin 3x = 0$ jest $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}.$$

Z tego wynika, że dla $x = \frac{\pi}{2}$ nierówność $\cos\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}$ jest fałszywa.

Kolejną liczbą dodatnią spełniającą równanie $\sin x + \sin 3x = 0$ jest $x = \pi$.

$$\cos\left(\frac{1}{2} \cdot \pi\right) = 0 < \frac{1}{2}.$$

Z tego wynika, że dla $x = \pi$ nierówność $\cos\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}$ jest prawdziwa.

Najmniejszą liczbą dodatnią spełniającą warunki zadania jest $x = \pi$.

Zadanie 35.

I sposób

Funkcja *f* ma postać $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

Wyznaczmy wzór funkcji *g* oraz wzór funkcji *h*.

$$g(x)=a_1(x+2)(x-3).$$

$g(0)=-6$, więc $a_1=1$ oraz $g(x)=x^2-x-6$.

$$h(x)=a_2(x+4)(x-6).$$

$h(0)=-12$, więc $a_2=\frac{1}{2}$ oraz $h(x)=\frac{1}{2}x^2-x-12$.

Wiemy, że $g(x)=k\cdot f(x)=kax^2+kbx+kc$ oraz $g(x)=x^2-x-6$.

Wiemy również, że $h(x)=f(kx)=k^2ax^2+kbx+c$ oraz $h(x)=\frac{1}{2}x^2-x-12$.

Wynika z tego, że $a=2$, $b=-2$ oraz $c=-12$.

Tak więc $f(x)=2x^2-2x-12$.

II sposób

Funkcja *f* ma postać $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

Wynika z tego, że $g(x)=k\cdot f(x)=k(ax^2+bx+c)$.

Miejscami zerowymi funkcji *g* są liczby $x_1=-2$ i $x_2=3$.

Tak więc $g(x)=k\cdot a(x+2)(x-3)$. Z postaci funkcji *f* i *g* wynika, że liczby $x_1=-2$ i $x_2=3$ są również miejscami zerowymi funkcji *f* i $f(x)=a(x+2)(x-3)$.

Funkcja *h* ma postać $h(x)=f(kx)=a(kx)^2+b\cdot kx+c$.

Zauważmy, że wyraz wolny "*c*" nie jest zależny od *k*. Oznacza to, że dla funkcji *f* oraz funkcji *h* wartość *c* jest taka sama i wynosi $c=-12$.

Wiemy, że $c=f(0)=-12$. Tak więc punkt $(0,-12)$ należy do wykresu funkcji *f*.

Określiliśmy funkcję *f* wzorem: $f(x)=a(x+2)(x-3)$. Po podstawieniu punktu $(0,-12)$ do wzoru funkcji otrzymamy wartość współczynnika *a*:

$$a(0+2)(0-3)=-12,$$

$$-6a=-12.$$

Tak więc $a=2$.

Funkcja *f* ma postać $f(x)=2(x+2)(x-3)$.

Po przekształceniu wzoru do postaci ogólnej mamy $f(x)=2x^2-2x-12$.

Zadanie 36.

Przekształcamy równoważnie lewą stronę równości:

$$\frac{1+2\cos 88^\circ\cdot\cos 2^\circ}{\cos^2 2^\circ-\cos 88^\circ\cdot\sin 2^\circ}=\frac{1+2\sin 2^\circ\cdot\cos 2^\circ}{\cos^2 2^\circ-\sin 2^\circ\cdot\sin 2^\circ}=\frac{\sin^2 2^\circ+2\sin 2^\circ\cos 2^\circ+\cos^2 2^\circ}{\cos^2 2^\circ-\sin^2 2^\circ}=$$

$$=\frac{\left(\sin 2^\circ+\cos 2^\circ\right)^2}{\left(\cos 2^\circ+\sin 2^\circ\right)\left(\cos 2^\circ-\sin 2^\circ\right)}=\frac{\cos 2^\circ+\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ-\sin 2^\circ}=\frac{1+\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}}{1-\frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}}=\frac{1+\operatorname{tg} 2^\circ}{1-\operatorname{tg} 2^\circ},$$

co kończy uzasadnienie.

Zadanie 37.

B

Zadanie 38.

C

Zadanie 39.

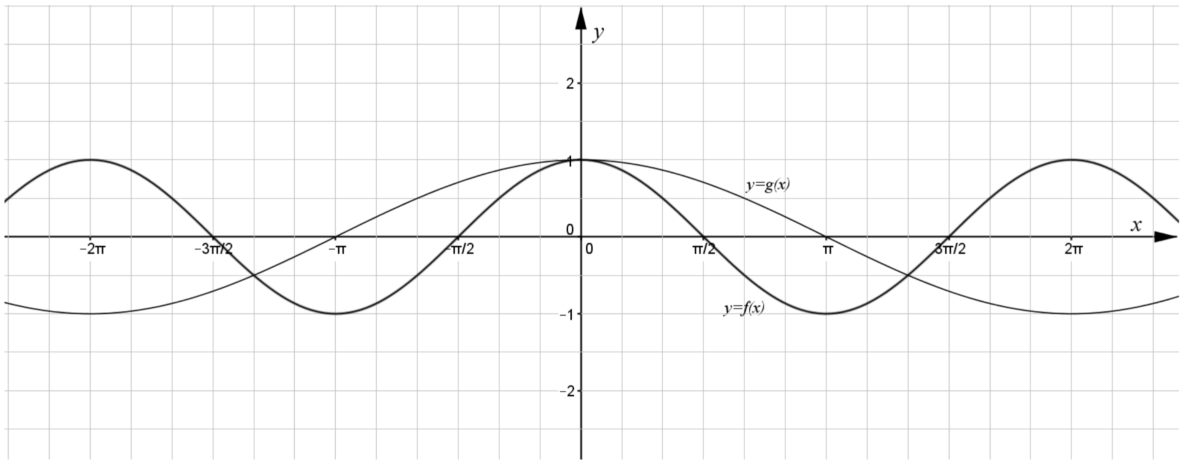
Sporządzamy w układzie współrzędnych wykres funkcji $f(x)=\cos x$.

Funkcja $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)=\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$.

Okresem podstawowym funkcji $f(x)=\cos x$ jest 2π.

Stąd otrzymujemy: $\cos\left(\frac{1}{2}x\right)=\cos\left(\frac{1}{2}x+2\pi\right)=\cos\frac{1}{2}\left(x+4\pi\right)$.

Funkcja $y=g(x)$ ma okres podstawowy 4π.



Zatem następuje „dwukrotne rozciąganie wykresu funkcji” $f(x)=\cos x$ wzdłuż osi Ox.

Rozwiązujemy algebraicznie równanie $f(x)=g(x)$:

$$\cos x=\cos\left(\frac{1}{2}x\right),$$

$$\cos x - \cos\left(\frac{1}{2}x\right) = 0,$$

$$-2\sin\left(\frac{3}{4}x\right)\sin\left(\frac{1}{4}x\right) = 0.$$

Stąd otrzymujemy: $\sin\left(\frac{3}{4}x\right) = 0$ lub $\sin\left(\frac{1}{4}x\right) = 0$.

Wykorzystujemy własności funkcji $y = \sin x$:

$$\frac{3}{4}x = k\pi \text{ lub } \frac{1}{4}x = k\pi, \text{ gdzie } k \in C,$$

$$x = \frac{4}{3}k\pi \text{ lub } x = 4k\pi, \text{ gdzie } k \in C.$$

Zatem $x = \frac{4}{3}k\pi$, gdzie $k \in C$.

Zadanie 40.

Równanie możemy przekształcić w sposób równoważny:

$$\sin 2x + 2\sin x + \cos x + 1 = 0,$$

$$\cos x(2\sin x + 1) + 2\sin x + 1 = 0,$$

$$(2\sin x + 1)(\cos x + 1) = 0.$$

Zauważmy, że ostatnie równanie jest równoważne alternatywie

$$2\sin x + 1 = 0 \tag{1}$$

lub

$$\cos x + 1 = 0. \tag{2}$$

Równanie (1) jest równoważne równaniu

$$\sin x = -\frac{1}{2},$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

Zatem

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ dla dowolnej liczby całkowitej } k$$

lub

$$x = \left(\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + 2k\pi, \text{ czyli } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \text{ dla dowolnej liczby całkowitej } k.$$

W zadanym przedziale rozwiązaniem są liczby $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$.

Równanie (2) jest równoważne równaniu

$$\cos x = -1,$$

$$\cos x = \cos(\pi).$$

Zatem

$$x = \pi + 2k\pi \text{, dla dowolnej liczby całkowitej } k.$$

W zadanym przedziale rozwiązaniem są liczby $-\pi$, π.

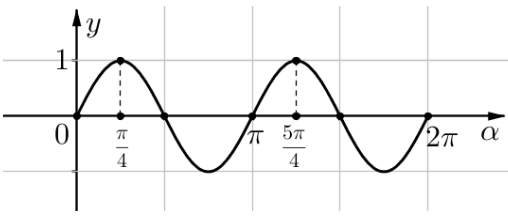
Funkcja sinus przyjmuje wartość $-\frac{1}{2}$ dwa razy w okresie, w szczególności dla $-\frac{\pi}{6}$ oraz dla $\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Uwzględniając okresowość tej funkcji, rozwiązaniem są liczby postaci $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oraz $x = \left(\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + 2k\pi$. Tylko dwie liczby takiej postaci należą do przedziału $\langle -\pi, \pi \rangle$. Które?

Zadanie 41.

Równanie $(x^2 - \sin 2\alpha)(x-1) = 0$ ma trzy rozwiązania, gdy są spełnione warunki:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha > 0 \\ \sin 2\alpha \neq 1 \end{cases}$$

Naszkicujemy wykres funkcji $y = \sin 2\alpha$ dla $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$, który otrzymamy, przekształcając odpowiednio wykres funkcji $y = \sin \alpha$.



Odczytujemy z wykresu funkcji $y = \sin 2\alpha$ wszystkie wartości $\alpha \in \langle 0; 2\pi \rangle$, dla których spełnione są warunki zadania: $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Zadanie 42.

Korzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta i otrzymujemy nierówność równoważną nierówności z zadania:

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 < 0.$$

Podstawiamy $t = \cos x$ i rozwiązujemy nierówność kwadratową

$$2t^2 - t - 1 < 0.$$

Miejscami zerowymi trójmianu $2t^2 - t - 1$ są liczby $t_1 = -\frac{1}{2}$ oraz $t_2 = 1$, zatem nierówność jest spełniona dla $t \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, czyli dla takich *x*, dla których $-\frac{1}{2} < \cos x < 1$. Poszukamy najpierw rozwiązań w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$. Ponieważ $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$, $\cos 0 = 1$ oraz funkcja cos jest rosnąca w przedziale $\langle -\pi, 0 \rangle$, to $-\frac{1}{2} < \cos x < 1$, gdy $-\frac{2}{3}\pi < x < 0$. Podobnie, $\cos 0 = 1, \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$ i funkcja cos jest malejąca w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$, zatem $-\frac{1}{2} < \cos x < 1$, gdy $0 < x < \frac{2}{3}\pi$. Pamiętając o okresowości funkcji cos, otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie: $\cos 2x < \cos x$, gdy $x \in \left(-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)$ oraz $x \neq 2k\pi$ dla dowolnej liczby całkowitej *k*.

Zadanie 43.

Równanie $(\cos x + a) \cdot (\sin^2 x - a) = 0$ jest równoważne alternatywie

$$\cos x + a = 0 \tag{1}$$

lub

$$\sin^2 x - a = 0. \tag{2}$$

— Zauważmy, że dla $a > 1$ żadne z równań (1), (2) nie ma rozwiązania.

— Dla $a = 1$ równanie (1) przyjmuje postać $\cos x = -1$, a jego jedynym rozwiązaniem w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ jest liczba π.

  Z kolei równanie (2) przyjmuje postać $\sin^2 x = 1$, czyli $\sin x = 1$ lub $\sin x = -1$. Rozwiązaniami w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ są odpowiednio liczby: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

  Zatem dla $a = 1$ mamy 3 rozwiązania.

— Dla $a \in (0, 1)$ równanie (2) przyjmuje postać $\sin^2 x = a$, czyli $\sin x = \sqrt{a}$ lub $\sin x = -\sqrt{a}$. Każde z równań $\sin x = \sqrt{a}$ oraz $\sin x = -\sqrt{a}$ ma w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ dwa różne rozwiązania i żadne z rozwiązań równania $\sin x = \sqrt{a}$ nie może być rozwiązaniem równania $\sin x = -\sqrt{a}$.

  Zatem samo równanie (2) ma już 4 rozwiązania, co oznacza, że nie są spełnione warunki zadania.

— Dla dowolnej ujemnej wartości parametru *a* równanie $\sin^2 x - a = 0$ nie ma rozwiązania. Z kolei równanie $\cos x + a = 0$ może mieć w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ co najwyżej 2 rozwiązania, zatem nie mogą być spełnione warunki zadania.

— Dla $a=0$ mamy: $\cos x=0$ lub $\sin^2 x=0$. Pierwsze z równań ma dwa rozwiązania w zadanym przedziale, drugie trzy inne rozwiązania. Nie są zatem spełnione warunki zadania.

3.3. Ciągi

Zadanie 45.

Ponieważ ciąg (a_n) jest geometryczny, jego wzór ogólny ma postać $a_n = 7\cdot q^{n-1}$ dla $n\in\{1,2,3,...\}$. Zauważmy, że $q\neq 0$, gdyż w przeciwnym razie w równaniu rekurencyjnym dojdzie do sprzeczności dla $n=1$.

Podstawiamy wyraz ogólny do wzoru rekurencyjnego:

$$7\cdot q^{n+1} = \frac{1}{6}\cdot 7\cdot q^n + \frac{1}{3}\cdot 7\cdot q^{n-1}.$$

Podzielmy równanie przez $7\cdot q^{n-1}$. Otrzymujemy równanie

$$q^2 = \frac{1}{6}\cdot q + \frac{1}{3}.$$

Stąd

$$6q^2 - q - 2 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 1+4\cdot 2\cdot 6 = 49$.

Stąd $q=-\frac{1}{2}$ lub $q=\frac{2}{3}$.

Zatem ciąg (a_n) ma postać: $a_n = 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ lub $a_n = 7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Gdy ciąg (a_n) ma postać: $a_n = 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, to $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$, więc suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa $S=\dfrac{7}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{14}{3}$.

Gdy ciąg (a_n) ma postać: $a_n = 7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, to $\left|\frac{2}{3}\right|<1$, więc suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa $S=\dfrac{7}{1-\frac{2}{3}}=21$.

Zadanie 46.

Znajdujemy ogólną postać wyrazów ciągu (c_n):

$$c_n = a_n \cdot b_n = \frac{3n^2}{(4n^2+2n)(n+1)} = \frac{3n^2}{4n^3+6n^2+2n} = \frac{\frac{3}{n}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}.$$

Ciąg $\left(\frac{3}{n}\right)$ ma granicę równą 0, natomiast ciąg $\left(4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}\right)$ ma granicę równą 4. Stąd, z twierdzenia o granicy ilorazu, mamy $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Zadanie 47.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3n}{n^2+2} - \frac{n^2+7n}{n+21}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^3+3n\right)\left(n+21\right)-\left(n^2+7n\right)\left(n^2+2\right)}{\left(n^2+2\right)\left(n+21\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4+21n^3+3n^2+63n-n^4-7n^3-2n^2-14n}{n^3+21n^2+2n+42} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{14n^3+n^2+49n}{n^3+21n^2+2n+42} = \lim_{n\to\infty}\frac{14+\frac{1}{n}+\frac{49}{n^2}}{1+\frac{21}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{42}{n^3}} = 14.$$

Zadanie 48.

Przekształcamy wyrażenie $\frac{n^3-n^2}{n^2+1} - \frac{n^2}{n+3}$:

$$\frac{n^3-n^2}{n^2+1} - \frac{n^2}{n+3} = \frac{\left(n^3-n^2\right)\left(n+3\right)-n^2\left(n^2+1\right)}{\left(n^2+1\right)\left(n+3\right)} = \frac{2n^3-4n^2}{\left(n^2+1\right)\left(n+3\right)}.$$

Obliczamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-4n^2}{\left(n^2+1\right)\left(n+3\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(2-\frac{4}{n}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{4}{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{2}{1\cdot 1} = 2.$$

Zadanie 49.

Niech q będzie ilorazem danego ciągu geometrycznego. Z założenia, $a_1 = \sqrt{2}$ oraz $a_2 + a_3 = \sqrt{2}q + \sqrt{2}q^2 = \frac{3}{4}\sqrt{2}$. Otrzymujemy stąd równanie kwadratowe $q^2 + q - \frac{3}{4} = 0$, którego pierwiastkami są $\frac{1}{2}$ i $-\frac{3}{2}$. Pierwsze dwa warunki zadania spełniają zatem dwa ciągi (o ilorazach $\frac{1}{2}$ i $-\frac{3}{2}$), lecz tylko szereg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$ jest zbieżny.

Ze wzoru na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego otrzymujemy

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sqrt{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Zadanie 50.

Wprowadzamy oznaczenia: d — przekątna sześcianu, k — przekątna ściany sześcianu.

Ponieważ krawędź wyjściowego sześcianu jest równa x_1, zatem

$$d = \sqrt{3}x_1 \quad \text{oraz} \quad k = \sqrt{2}x_1.$$

Krawędź drugiego sześcianu jest równa:

$$x_2 = d - k = \sqrt{3}x_1 - \sqrt{2}x_1 = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)x_1.$$

Długości krawędzi kolejnych sześcianów tworzą nieskończony ciąg geometryczny (x_n), w którym x_1 jest pierwszym wyrazem, natomiast $x_2 = x_1\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$.

Stąd $q = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Spełniony jest warunek zbieżności $|q| < 1$.

Obliczamy sumę $S = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ długości krawędzi tak powstałych sześcianów:

$$S = \frac{x_1}{1-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{x_1\left(1+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right)}{\left(1-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right)\left(1+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right)} = \frac{x_1\left(1+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right)}{1-\left(5-2\sqrt{6}\right)} = \frac{x_1\left(1+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right)}{2\sqrt{6}-4}.$$

$$S = \frac{x_1\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+2\right)}{2\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)} = \frac{x_1\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{4}.$$

Suma długości krawędzi wszystkich tak powstałych sześcianów jest równa $\frac{x_1\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{4}$.

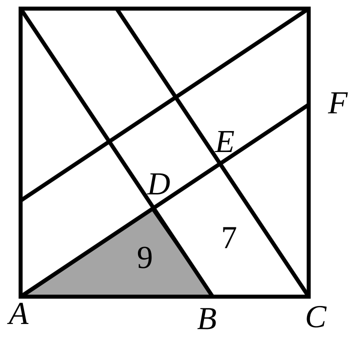
3.4. Geometria

Zadanie 53.

A

Zadanie 54.

Zauważmy, że odpowiednie proste są równoległe oraz odpowiednie trójkąty i czworokąty są przystające. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąty ABD i ACE są podobne, a ich skala podobieństwa jest równa $k=\sqrt{\frac{9}{9+7}}=\frac{3}{4}$. Zatem $\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{4}{3}$.

Pole trójkąta ACF jest równe $9+7+9=25$, czyli

$$25=\frac{1}{2}|AC|\cdot|CF|=\frac{1}{2}|AC|\cdot|AB|=\frac{1}{2}|AC|\cdot\frac{3}{4}|AC|=\frac{3}{8}|AC|^2.$$

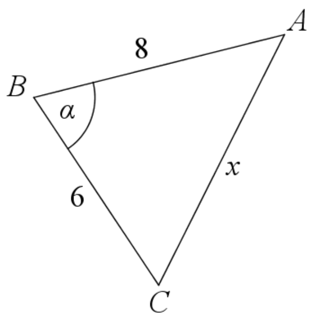
Zatem $|AC|^2=\frac{8}{3}\cdot 25=\frac{200}{3}$.

Zadanie 55.

C

Zadanie 56.

I sposób



Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku obok.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej: $\cos^2\alpha=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

Rozpatrujemy dwa przypadki $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ lub $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$.

Wykorzystujemy twierdzenie cosinusów do wyznaczenia boku $|AC|=x$.

I. Dla $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ otrzymujemy:

$$x^2 = 36 + 64 - 96 \cdot \frac{2}{3} = 36,$$

$$x = 6.$$

Z twierdzenia sinusów otrzymujemy:

$$R = \frac{x}{2\sin\alpha} = \frac{6}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

Obliczamy pole trójkąta i jego obwód:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 8\sqrt{5},$$

$$L = 20.$$

Obliczamy promień okręgu wpisanego:

$$r = \frac{P}{\frac{1}{2}L} = \frac{8\sqrt{5}}{10} == \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Wyznaczamy stosunek promieni:

$$\frac{R}{r} = \frac{9\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{4\sqrt{5}} = \frac{9}{4}.$$

II. Dla $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ otrzymujemy:

$$x^2 = 36 + 64 + 96 \cdot \frac{2}{3} = 164,$$

$$x = 2\sqrt{41}.$$

Z twierdzenia sinusów otrzymujemy:

$$R = \frac{x}{2\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{41}}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}} = 2\sqrt{41} \cdot \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{205}}{5}.$$

Obliczamy obwód trójkąta:

$$L = 14 + 2\sqrt{41}.$$

Obliczamy promień okręgu wpisanego:

$$r = \frac{P}{\frac{1}{2}L} = \frac{8\sqrt{5}}{7 + \sqrt{41}} = 7\sqrt{5} - \sqrt{205}.$$

Wyznaczamy stosunek promieni:

$$\frac{R}{r}=\frac{3\sqrt{205}}{5}\cdot\frac{7+\sqrt{41}}{8\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{41}\left(7+\sqrt{41}\right)}{40}=\frac{21\sqrt{41}+123}{40}.$$

Dla trójkąta ostrokątnego $\frac{R}{r}=\frac{9}{4}$, natomiast dla rozwartokątnego $\frac{R}{r}=\frac{21\sqrt{41}+123}{40}$.

II sposób

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej: $\cos^2\alpha=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

Rozpatrujemy dwa przypadki: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ lub $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$.

Wykorzystujemy twierdzenie cosinusów do wyznaczenia boku $|AC|=x$.

Dla $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ otrzymujemy:

$$x^2=36+64-96\cdot\frac{2}{3}=36,$$

$$x=6.$$

Obliczamy pole trójkąta i połowę jego obwodu:

$$P=\frac{1}{2}\cdot 48\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=8\sqrt{5},$$

$$p=10,$$

$$\frac{R}{r}=\frac{\frac{|AB|\cdot|BC|\cdot|AC|}{4P}}{\frac{P}{p}}=\frac{|AB|\cdot|BC|\cdot|AC|\cdot p}{4P^2}=\frac{6\cdot 8\cdot 6\cdot 10}{4\cdot 64\cdot 5}=\frac{9}{4}.$$

Dla $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$ otrzymujemy:

$$x^2=36+64+96\cdot\frac{2}{3}=164,$$

$$x=2\sqrt{41}.$$

Obliczamy połowę obwodu trójkąta:

$$p=7+\sqrt{41},$$

$$\frac{R}{r}=\frac{\frac{|AB|\cdot|BC|\cdot|AC|}{4P}}{\frac{P}{p}}=\frac{|AB|\cdot|BC|\cdot|AC|\cdot p}{4P^2}=\frac{6\cdot 8\cdot 2\sqrt{41}\cdot\left(7+\sqrt{41}\right)}{4\cdot 64\cdot 5}=\frac{21\sqrt{41}+123}{40}.$$

Dla trójkąta ostrokątnego $\frac{R}{r}=\frac{9}{4}$, natomiast dla rozwartokątnego $\frac{R}{r}=\frac{21\sqrt{41}+123}{40}$.

Zadanie 57.

I sposób

Obwód trapezu *L* wyraża się wzorem $L=a+b+2c$.

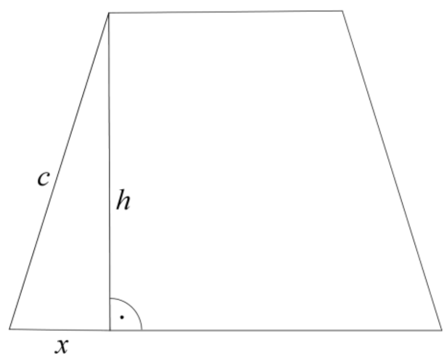
Trapez jest opisany na okręgu, więc sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

Oznacza to, że $a+b=2c$. Wynika z tego, że $L=4c$.

Wyznaczmy długość boku *c*.

Wiemy, że promień okręgu $r=\frac{\sqrt{91}}{2}$. Tak więc wysokość trapezu $h=2r=\sqrt{91}$.

Rozważmy trójkąt o bokach długości *x, h* i *c,* gdzie $x=\frac{a-b}{2}=3$.



Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$c=\sqrt{91+9},$$

$$c=10.$$

Wynika z tego, że obwód trapezu $L=40$.

II sposób

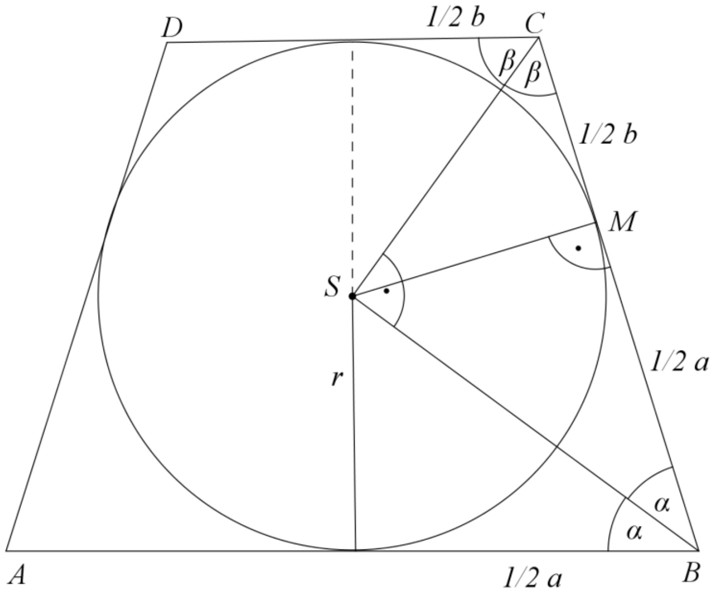
Obwód trapezu *L* wyraża się wzorem $L=a+b+2c$.

Trapez jest opisany na okręgu, więc sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

Oznacza to, że $a+b=2c$. Wynika z tego, że $L=2(a+b)$.

Wiemy, że $a-b=6$. Wyznaczmy długość boku *b*.

Zauważmy, że *CSB* jest trójkątem prostokątnym oraz $r=\frac{\sqrt{91}}{2}$ jest wysokością tego trójkąta.



Wtedy $r^2 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b$;

$$\frac{91}{4} = \frac{1}{4}b(b+6),$$

$$b^2 + 6b - 91 = 0, \quad b > 0,$$

$$b_1 = \frac{-6-20}{2} = -13,$$

$$b_2 = \frac{-6+20}{2} = 7.$$

Tak więc $b = 7$.

Oznacza to, że $L = 2(2 \cdot 7 + 6) = 40$.

Zadanie 58.

Oznaczmy: $|\sphericalangle CDB| = \alpha$, $|BD| = |DC| = x$.

Ponieważ trójkąt CDB jest równoramienny i $|BD| = |DC|$, $|\sphericalangle CBD| = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Kąty DBC i DAC są wpisane w okrąg i oparte na tym samym łuku DC, więc $|\sphericalangle DAC| = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Kąty CDB i CAB są wpisane w okrąg i oparte na tym samym łuku BC, więc $|\sphericalangle CAB| = \alpha$.

Korzystamy z twierdzenia cosinusów w trójkącie DAC:

$$|DC|^2 = |DA|^2 + |CA|^2 - 2 \cdot |DA| \cdot |CA| \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right),$$

zatem

$$x^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów w trójkącie *DAB*:

$$|DB|^2 = |DA|^2 + |AB|^2 - 2\cdot|DA|\cdot|AB|\cos\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right),$$

zatem

$$x^2 = 5^2 + 4^2 + 2\cdot 5\cdot 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ x^2 = 5^2 + 4^2 + 2\cdot 5\cdot 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 2\cdot 5^2 + 2\cdot 6^2 - 2\cdot 2\cdot 5\cdot 6\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ 3x^2 = 3\cdot 5^2 + 3\cdot 4^2 + 3\cdot 2\cdot 5\cdot 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{cases}$$

Dodając równania stronami, otrzymujemy:

$$5x^2 = 5\cdot 5^2 + 3\cdot 4^2 + 2\cdot 6^2,$$

$$x^2 = 49.$$

Wobec tego $x = 7$.

Wówczas: $49 = 5^2 + 4^2 + 2\cdot 5\cdot 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, a więc $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{5}$, czyli $\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{5}$.

Z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ otrzymujemy $\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{24}}{5}$.

Z twierdzenia sinusów otrzymujemy: $\dfrac{|DC|}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = 2R$, czyli $\dfrac{7}{\frac{\sqrt{24}}{5}} = 2R$.

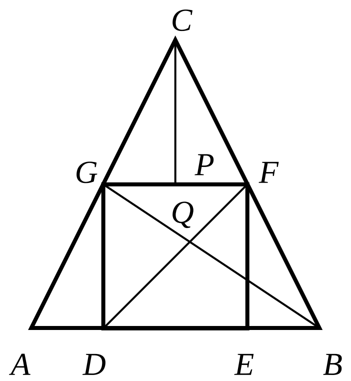
Promień okręgu opisanego na czworokącie ma długość: $\dfrac{35\sqrt{6}}{24}$.

Zadanie 59.

Oznaczmy punkt przecięcia się odcinków DF i BG jako Q oraz $|\sphericalangle ABG| = \alpha$, $|\sphericalangle DQB| = \beta$, $|DE| = |DG| = x$.

Trójkąty ADG i BEF są przystające, ponieważ są prostokątne i mają taką samą przyprostokątną ($|GD| = |EF|$), naprzeciw której znajdują się równe kąty (kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego).

Naszkicujmy wysokość trójkąta CFG poprowadzoną z wierzchołka C — spodek tej wysokości oznaczmy jako P.



Wtedy trójkąty ADG oraz GPC są podobne, bo ich boki są odpowiednio równoległe. Pole trójkąta CFG (podzielonego odcinkiem CP na dwa przystające trójkąty: CGP i CFP) jest równe sumie pól przystających trójkątów ADG i BEF, zatem trójkąty ADG oraz GPC są przystające. W szczególności $|EB| = \frac{1}{2}|DE|$.

Ponieważ $|\sphericalangle EDF| = 45°$, to $\sin(\sphericalangle EDF) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Z kolei

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|DG|}{|DB|} = \frac{x}{x + \frac{1}{2}x} = \frac{x}{\frac{3}{2}x} = \frac{2}{3}$$

i kąt jest ostry, więc $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ oraz $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Zatem

$$\sin\beta = \sin(180° - 45° - \alpha) = \sin(135° - \alpha) = \sin 135° \cdot \cos\alpha - \cos 135° \cdot \sin\alpha .$$

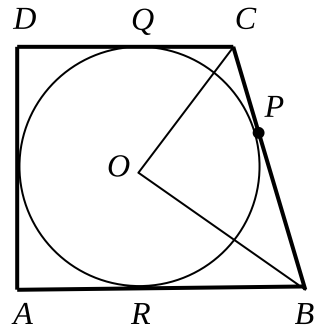
Ale $\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oraz $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, stąd

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{26}}{26} .$$

Pozostaje zauważyć, że kąt ostry, pod jakim przecinają się odcinki *DF* i *BG*, jest kątem przyległym do kąta β, zatem sinus kąta ostrego, pod jakim przecinają się odcinki *DF* i *BG*, jest równy $\frac{5\sqrt{26}}{26}$.

Zadanie 60.

Oznaczmy przez *Q* i *R* odpowiednie punkty styczności (zobacz rysunek).



Wówczas odcinki *OC* i *OB* zawierają się w dwusiecznych kątów *ABC* i *BCD*, a ponieważ suma tych kątów jest równa 180 stopni, więc kąt *BOC* jest prosty.

W trójkącie prostokątnym *BOC* spełniony jest warunek $|OP|^2 = pq$ (wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na dwa takie odcinki, że iloczyn ich długości jest równy kwadratowi tej wysokości). Ale $|OP|$ jest równa promieniowi okręgu, zatem $|AD| = 2|OP| = 2\sqrt{p} \cdot \sqrt{q}$.

Z własności czworokąta opisanego na okręgu otrzymujemy, że $|AB| + |DC| = |CB| + |AD|$, zatem

$$|AB| + |AD| + |DC| + |CB| = 2\left(|AD| + |CB|\right) = 2\left(2\sqrt{p}\sqrt{q} + p + q\right) = 2\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)^2 .$$

Zadanie 61.

Trójkąt *ABF* jest podobny do trójkąta *CDF*, zatem zachodzi równość: $\frac{|DF|}{|FB|} = \frac{|DC|}{|AB|}$.

Trójkąt *EBG* jest podobny do trójkąta *CGD*, zatem zachodzi równość: $\frac{|GB|}{|GD|} = \frac{|AB| - |DC|}{|DC|}$.

Ponieważ $|DG| = |BF|$ i $|GB| = |DF|$, z powyższych dwóch równości wynika, że

$$\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|AB| - |DC|}{|DC|} .$$

Wobec tego otrzymujemy równanie:

$$|DC|^2 = |AB|^2 - |AB||CD|.$$

Dzieląc stronami przez $|CD|^2$, otrzymujemy równanie z niewiadomą $\frac{|AB|}{|CD|}$:

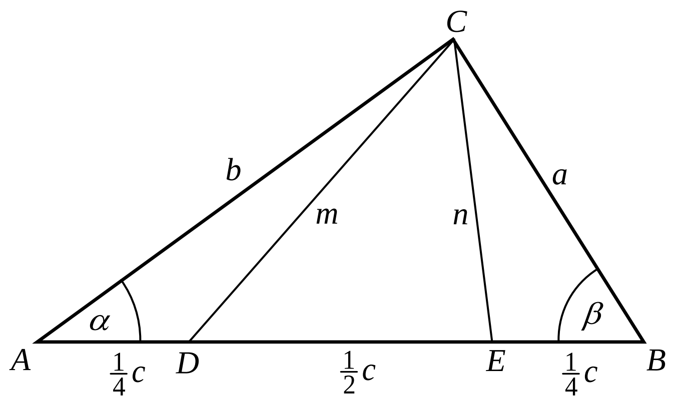
$$\left(\frac{|AB|}{|CD|}\right)^2 - \frac{|AB|}{|CD|} - 1 = 0.$$

Obliczamy $\Delta = 1 + 4 = 5$. Zatem $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ lub $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Tylko druga wartość spełnia warunki zadania, zatem $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Zadanie 62.

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Teza przyjmuje wtedy postać $b^2 + 2n^2 = a^2 + 2m^2$.

Z twierdzenia cosinusów dla kąta α w trójkątach ADC i ABC otrzymujemy

$m^2 = \left(\frac{1}{4}c\right)^2 + b^2 - 2\cdot\frac{1}{4}c\cdot b\cos\alpha$ oraz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Z drugiego równania otrzymujemy $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$. Stąd i z pierwszego równania mamy

$$m^2 = \frac{1}{16}c^2 + b^2 - \frac{1}{4}\left(b^2 + c^2 - a^2\right),$$

$$m^2 = \frac{3}{4}b^2 - \frac{3}{16}c^2 + \frac{1}{4}a^2. \qquad (1)$$

Analogicznie z twierdzenia cosinusów dla kąta β w trójkątach BEC i ABC otrzymujemy

$$n^2 = \left(\frac{1}{4}c\right)^2 + a^2 - 2\cdot\frac{1}{4}c\cdot a\cos\beta \quad \text{oraz} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

Z drugiego równania otrzymujemy $2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$. Stąd i z pierwszego równania mamy

$$n^2 = \tfrac{1}{16}c^2 + a^2 - \tfrac{1}{4}\left(a^2 + c^2 - b^2\right),$$

$$n^2 = \tfrac{3}{4}a^2 - \tfrac{3}{16}c^2 + \tfrac{1}{4}b^2.$$

$$n^2 = \tfrac{3}{4}a^2 - \tfrac{3}{16}c^2 + \tfrac{1}{4}b^2. \tag{2}$$

Odejmując stronami równości (1) i (2), otrzymujemy

$$m^2 - n^2 = \tfrac{3}{4}b^2 - \tfrac{3}{16}c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{3}{16}c^2 - \tfrac{1}{4}b^2,$$

$$m^2 - n^2 = \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}a^2,$$

$$2m^2 - 2n^2 = b^2 - a^2,$$

$$b^2 + 2n^2 = a^2 + 2m^2.$$

To kończy dowód.

Zadanie 63.

Kąty *CDB* i *CAB* są równe, gdyż są wpisane w okrąg o_1 i oparte na tym samym łuku *BC*. Ponieważ punkty *A, B, E* są współliniowe, kąty *EAC* i *BAC* są równe. Kąty *EAC* i *EFC* są wpisane w okrąg o_2 i oparte na tym samym łuku *EC*. Zatem wykazaliśmy, że kąt *EFC* jest równy kątowi *CDB*. Z założenia wiemy, że zachodzi równość $|\sphericalangle BFE| = |\sphericalangle CDB|$. Wobec tego $|\sphericalangle BFE| = |\sphericalangle CFE|$, a to oznacza, że punkty *F, B, C* są współliniowe.

Zadanie 64.

Współczynnik kierunkowy prostej o równaniu $\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2} = 0$ jest równy $\frac{1}{2}$. Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty $(1, 3)$ oraz $(3, -1)$:

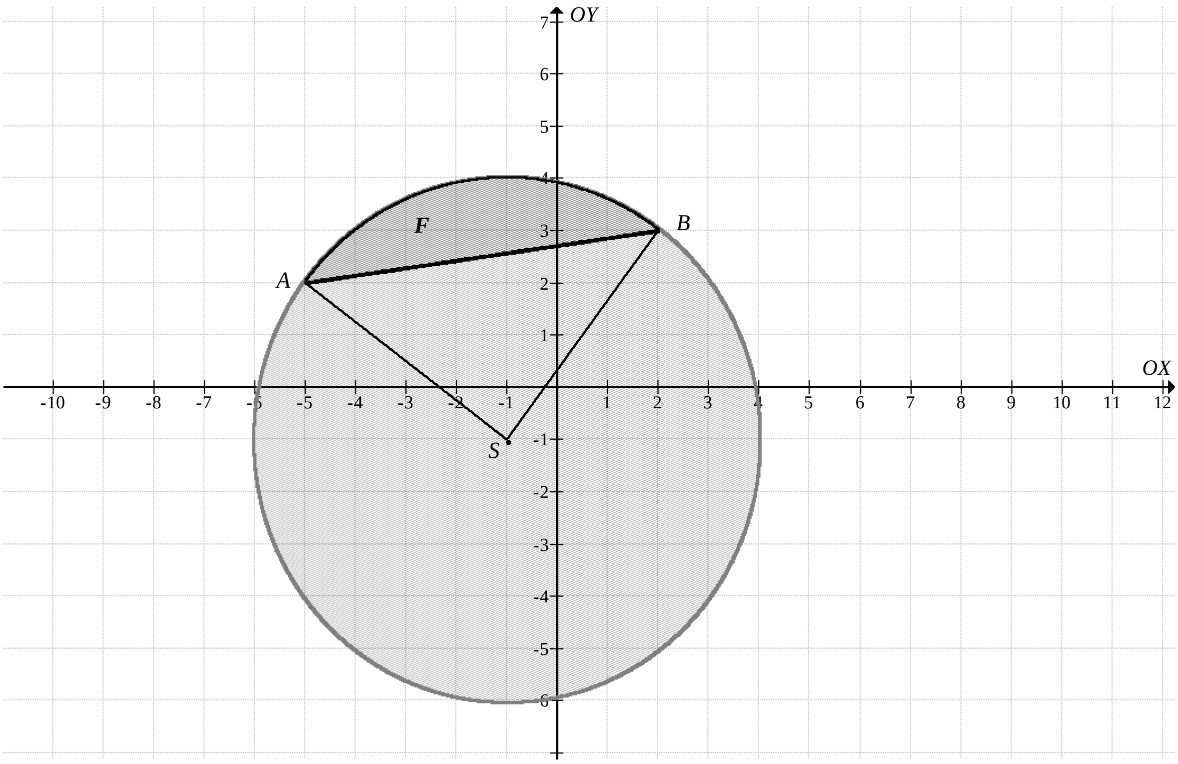
$$\frac{3-(-1)}{1-3} = -2.$$

Równość $(-2)\cdot\frac{1}{2} = -1$ świadczy o tym, że punkt $(3, -1)$ leży na prostej prostopadłej do prostej danej w zadaniu i przechodzącej przez punkt $(1, 3)$.

Zadanie 65.

I sposób

Figura F jest ograniczona prostą $y=\frac{1}{7}x+2\frac{5}{7}$ oraz łukiem okręgu $(x+1)^2+(y+1)^2=25$ o środku $S=(-1,-1)$ i promieniu $r=5$.



Punktami wspólnymi prostej i okręgu są punkty $A=(-5,2)$ i $B=(2,3)$:

$$(x+1)^2+\left(\frac{1}{7}x+2\frac{5}{7}+1\right)^2=25,$$

$$x^2+2x+1+\frac{1}{49}\left(x^2+52x+676\right)=25,$$

$$50x^2+150x-500=0,$$

$$x^2+3x-10=0,$$

$$x_1=\frac{-3-7}{2}=-5, \qquad x_1=\frac{-3+7}{2}=2,$$

$$y_1=-\frac{5}{7}+2\frac{5}{7}=2, \qquad y_2=\frac{2}{7}+2\frac{5}{7}=3.$$

Zauważmy, że pole P figury F jest równe różnicy pola P_W wycinka kołowego o promieniu r i kącie ASB oraz pola P_T trójkąta równoramiennego ASB.

$P=P_W-P_T$

Przyjmijmy, że kąt ASB ma miarę α.

Pole wycinka kołowego wyraża się wzorem: $P_W = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360^o}$.

W tym miejscu wystarczy zauważyć, że trójkąty *AA'S* i *BB'S*, gdzie *A'*=(–5,–1), *B'*=(2,–1), to przystające trójkąty prostokątne (o bokach 3, 4, 5), więc z uzupełniania kątów przy wierzchołku *S*, kąt α jest prosty.

Kąt $\alpha = 90^o$, tak więc

$$P_W = 25\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{4}\pi .$$

Obliczmy teraz długość odcinka *AB:*

$$|AB| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} .$$

Trójkąt *ASB* jest prostokątny i równoramienny, więc jego pole jest równe

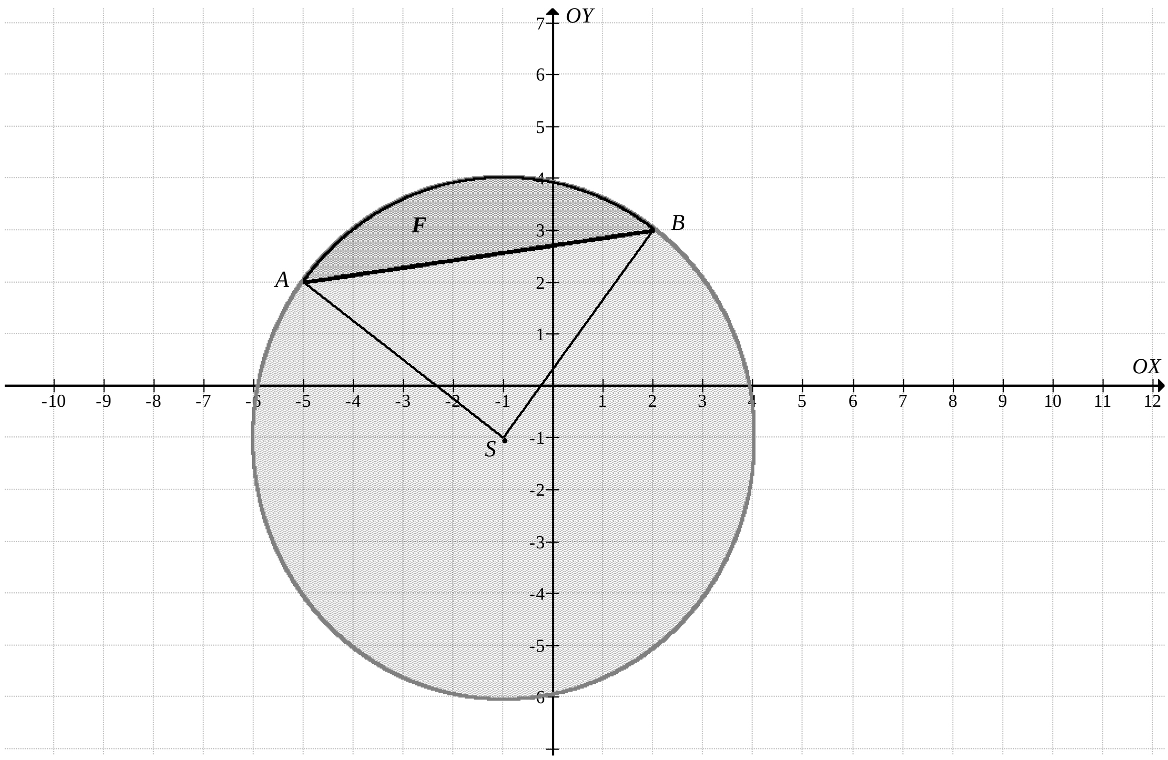
$$P_T = \frac{25}{2} .$$

Z powyższego wynika, że pole figury *F* jest równe:

$$P = \frac{25}{4}\pi - \frac{25}{2} = \frac{25}{4}(\pi - 2).$$

II sposób

Figurę *F* wyznaczają koło o środku $S = (-1, -1)$ i promieniu $r = 5$ oraz prosta $y = \dfrac{1}{7}x + 2\dfrac{5}{7}$.



Zauważmy, że pole *P* figury *F* jest równe różnicy pola P_W wycinka kołowego o promieniu *r* i kącie *ASB i* pola P_T trójkąta równoramiennego *ASB.*

$P = P_W - P_T$

Przyjmijmy, że kąt *ASB* ma miarę α .

Pole wycinka kołowego wyraża się wzorem: $P_W = \pi r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360^o}$.

Wyznaczmy odległość punktu $S = (-1, -1)$ od prostej $y = \dfrac{1}{7}x + 2\dfrac{5}{7}$.

Przekształćmy równanie prostej do postaci ogólnej: $x - 7y + 19 = 0$.

Odległość punktu *S* od danej prostej jest równa: $\dfrac{|-1+7+19|}{\sqrt{1+49}} = \dfrac{25}{5\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Zauważmy, że dana odległość jest połową długości przekątnej kwadratu o boku $|AS| = |AB| = 5$.

Oznacza to, że $\alpha = 90^o$.

Tak więc

$$P_W = 25\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{4}\pi .$$

Trójkąt *ASB* jest prostokątny i równoramienny, więc jego pole jest równe

$$P_T = \frac{25}{2} .$$

Pole figury *F* jest więc równe:

$$P = \frac{25}{4}\pi - \frac{25}{2} = \frac{25}{4}(\pi - 2) .$$

Zadanie 66.

I sposób

Z równań tych okręgów wnioskujemy, że okrąg o_1 ma środek w punkcie $(0, 0)$ i promień równy 1, natomiast okrąg o_2 ma środek w punkcie $(6, 3)$ i promień równy $\sqrt{5}$, zatem odległość między tymi środkami jest równa $\sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$ (tak więc okręgi nie mają punktów wspólnych), natomiast

$$|AB| = 3\sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 1 .$$

Wynika stąd, że odległość środka *S* odcinka *AB* od punktu (0, 0) jest równa $\dfrac{2\sqrt{5}-1}{2} + 1$, czyli $\sqrt{5} + \dfrac{1}{2}$. Jednocześnie *S* leży na prostej przechodzącej przez oba środki okręgów, czyli na prostej o równaniu $y = \dfrac{1}{2}x$, zatem jego współrzędne mają postać $\left(x, \dfrac{1}{2}x\right)$. Otrzymujemy stąd równanie

$$x^2+\frac{1}{4}x^2=\left(\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)^2,$$

które po przekształceniach przybiera postać

$$x^2=4+\frac{1}{5}+\frac{4}{\sqrt{5}}=\left(2+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2.$$

Punkt S leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, zatem jego współrzędnymi są $x=2+\frac{1}{\sqrt{5}}$ oraz $y=1+\frac{1}{2\sqrt{5}}$.

II sposób

Z równań tych okręgów wnioskujemy, że okrąg o_1 ma środek w punkcie $(0,0)$, natomiast okrąg o_2 ma środek w punkcie $(6,3)$. Odcinek łączący punkty A i B leży na prostej przechodzącej przez te dwa punkty, wyznaczamy więc równanie tej prostej: $y=\frac{1}{2}x$.

Punkt A jest wspólny dla tej prostej i okręgu o_1, musi zatem spełniać układ równań

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

lub — równoważnie — układ

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ x^2+\frac{1}{4}x^2=1 \end{cases}$$

czyli $\frac{5}{4}x^2=1$. $x=\frac{2}{\sqrt{5}}$ i w konsekwencji $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Tak więc $A=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Podobnie wyznaczamy współrzędne punktu B, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x \\ (x-6)^2+(y-3)^2=5 \end{cases}$$

prowadzący do równania kwadratowego $x^2-12x+32=0$, którego pierwiastkami są liczby 8 i 4. Pierwsze z tych rozwiązań odrzucamy, gdyż żaden punkt o pierwszej współrzędnej 8 nie należy do odcinka łączącego punkty $(0,0)$ i $(6,3)$. Pozostaje zatem $x=4$ i w konsekwencji $y=2$. Tak więc $B=(4,2)$.

Teraz możemy wyznaczyć środek S odcinka AB:

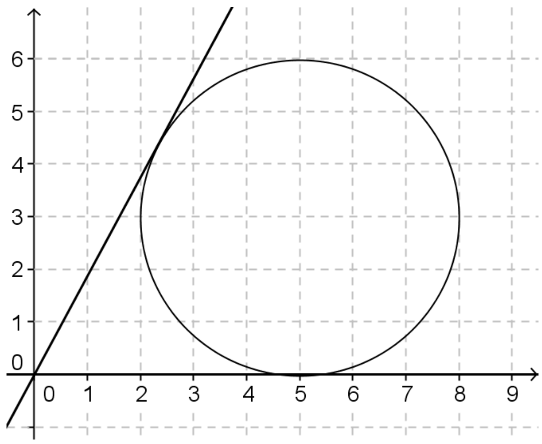
$$S=\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}+4}{2},\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}+2}{2}\right)=\left(2+\frac{1}{\sqrt{5}},1+\frac{1}{2\sqrt{5}}\right).$$

Zadanie 67.

I sposób

Zauważmy, że dany okrąg ma środek w punkcie $S=(5,3)$ i promień $r=3$.

Naszkicujmy rysunek w układzie współrzędnych.



Zauważmy, że prosta $x=0$ nie jest styczną, zatem każdą ze stycznych da się opisać równaniem

$$ax-y=0.$$

Odległość każdej ze stycznych od punktu *S* jest równa 3, zatem $\frac{|a\cdot 5-1\cdot 3|}{\sqrt{a^2+1}}=3$. Stąd otrzymujemy kolejno:

$$|a\cdot 5-1\cdot 3|^2=\left(3\sqrt{a^2+1}\right)^2,$$

$$25a^2-30a+9=9a^2+9,$$

$$16a^2-30a=0,$$

$$2a(8a-15)=0.$$

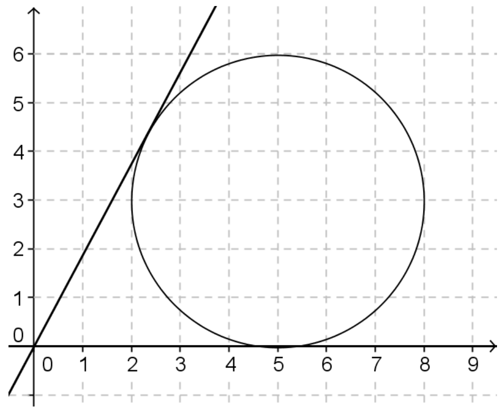
Stąd $a=0$ lub $a=\frac{15}{8}$.

Styczne mają równania: $y=0,\ y=\frac{15}{8}x$.

II sposób

Zauważmy, że dany okrąg ma środek w punkcie $S=(5,3)$ i promień $r=3$.

Naszkicujmy rysunek w układzie współrzędnych.



Zauważmy, że prosta $x=0$ nie jest styczną, zatem każdą ze stycznych da się opisać równaniem $y=ax$.

Zapiszmy układ równań prowadzący do wyznaczenia punktów wspólnych prostej i okręgu:

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2=9\\ y=ax\end{cases}$$

Po podstawieniu i uporządkowaniu otrzymujemy równanie kwadratowe jednej zmiennej:

$$(1+a^2)x^2-(10+6a)x+25=0.$$

Okrąg ma ze styczną jeden punkt wspólny, tym samym równanie ma mieć jedno rozwiązanie, zatem wyróżnik otrzymanego trójmianu musi być równy 0, czyli:

$$(10+6a)^2-4(1+a^2)\cdot 25=0.$$

Po odpowiednim rozwinięciu i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy:

$$8a(15-8a)=0.$$

Stąd $a=0$ lub $a=\frac{15}{8}$.

Styczne mają równania: $y=0,\ y=\frac{15}{8}x$.

Zadanie 68.

I sposób

Wyznaczamy środek i promień okręgu O_1: $S_1=(3,0),\ r_1=6$.

Wyznaczamy środek i promień okręgu O_2: $S_2=(0,m),\ r_2=|m|$, gdzie $m\neq 0$.

Okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny, gdy są styczne.

Sytuacja pierwsza

Okręgi styczne zewnętrznie.

$$|S_1S_2|=r_1+r_2,$$

$$\sqrt{9+m^2}=6+|m|.$$

Przekształcamy równoważnie równanie:

$$9+m^2=36+12|m|+m^2,$$

$$12|m|=-27.$$

Otrzymujemy równanie sprzeczne.

Zatem, nie istnieje taka wartość parametru m, dla której okręgi są styczne zewnętrznie.

Sytuacja druga

Okręgi styczne wewnętrznie.

$$|S_1S_2|=|r_1-r_2|,$$

$$\sqrt{9+m^2}=\big|6-|m|\big|.$$

Przekształcamy równoważnie równanie:

$$9+m^2=36-12|m|+m^2,$$

$$12|m|=27,$$

$$|m|=\frac{27}{12}=\frac{9}{4},$$

$$m=\frac{9}{4} \quad \text{lub} \quad m=-\frac{9}{4}.$$

Dla $m=\frac{9}{4}$ środek okręgu $S_2=\left(0,\frac{9}{4}\right)$.

Wyznaczamy równanie prostej S_1S_2:

$$\begin{cases} 0=3a+b \\ \frac{9}{4}=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ b=\frac{9}{4} \end{cases}$$

Zatem: $y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$.

Dla $m=-\frac{9}{4}$ środek okręgu $S_2=\left(0,-\frac{9}{4}\right)$.

Wyznaczamy równanie prostej S_1S_2:

$$\begin{cases} 0 = 3a + b \\ -\frac{9}{4} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}.$$

II sposób

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + (y-m)^2 = m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 + y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 - 2my + m^2 = m^2 \end{cases}$$

Odejmując równania stronami, otrzymujemy:

$$-6x + 9 + 2my = 36,$$

$$2my = 27 + 6x,$$

$$y = \frac{27 + 6x}{2m} \quad \text{dla } m \neq 0.$$

Otrzymujemy równanie:

$$x^2 - 6x + 9 + \frac{729 + 324x + 36x^2}{4m^2} = 36,$$

$$4m^2x^2 - 24m^2x + 36m^2 + 729 + 324x + 36x^2 = 144m^2,$$

$$(4m^2 + 36)x^2 - (24m^2 - 324)x - 108m^2 + 729 = 0.$$

Aby okręgi były styczne, równanie musi mieć dokładnie jedno rozwiązanie. Zatem wyróżnik równania $\Delta = 0$.

$$\Delta = 576m^4 - 15552m^2 + 104976 - 4(4m^2 + 36)(-108m^2 + 729),$$

$$\Delta = m^2(2304m^2 - 11664).$$

Otrzymujemy równanie:

$$m^2(2304m^2 - 11664) = 0.$$

Stąd $m = 0$ lub $m^2 = 5\frac{1}{16}$.

$m = 0$ — sprzeczne z założeniem

Zatem $m=2\frac{1}{4}$ lub $m=-2\frac{1}{4}$.

Dla $m=2\frac{1}{4}$ środek okręgu $S_2=\left(0,2\frac{1}{4}\right)$.

Wyznaczamy równanie prostej S_1S_2.

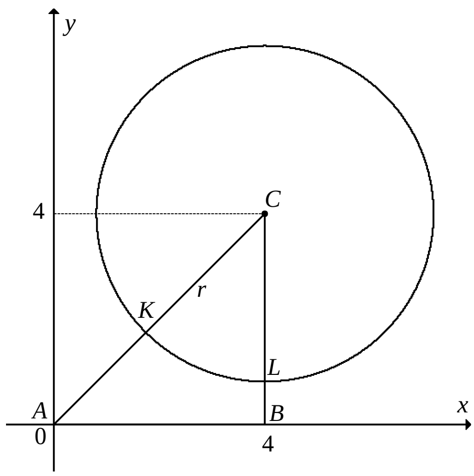
Dalsza część tak, jak w I sposobie.

Zadanie 69.

Oznaczmy przez $C=(x,y)$ środek odcinka *AB*. Ponieważ $A=(0,0)$ i $C=(x,y)$, to $B=(2x,2y)$. Współrzędne punktu *B* spełniają równanie okręgu opisanego w treści zadania, czyli $(2x-2)^2+(2y)^2=4$. Po podzieleniu obu stron równania przez 4 otrzymujemy, że współrzędne punktu *C* spełniają równanie okręgu $(x-1)^2+y^2=1$, co należało wykazać.

Zadanie 70.

Trójkąt *ABC* jest prostokątny i równoramienny. Pole tego trójkąta jest równe $P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$.
Zauważmy najpierw, że jeśli okrąg o środku *C* dzieli trójkąt na dwie figury o równych polach, to promień tego okręgu jest mniejszy od przyprostokątnej trójkąta. Gdyby był większy, to wtedy pole części „wykrojonej” z trójkąta przez okrąg byłoby co najmniej równe polu wycinka koła o kącie $45°$ i promieniu 4, więc co najmniej równe $\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot 4^2=2\pi$. Byłoby więc większe od połowy pola trójkąta. W rezultacie okrąg dzieli trójkąt na dwie figury, z których jedną jest wycinek koła o promieniu *r* i kącie $45°$. Pole tego wycinka jest równe 4.



Wynika stąd, że całe koło ma pole równe $8\cdot 4=32$. Ze wzoru na pole koła otrzymujemy $32=\pi r^2$, skąd

$$r^2=\frac{32}{\pi}.$$

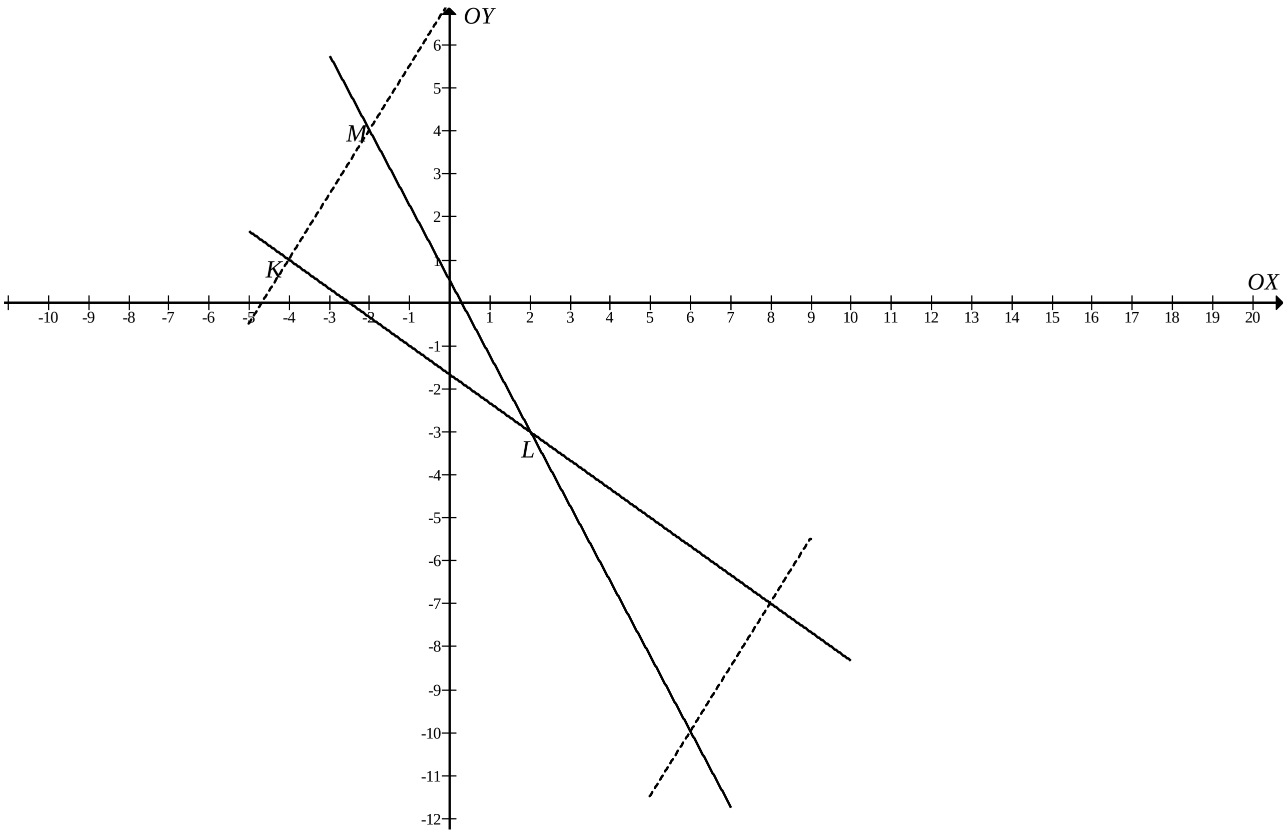
Ponieważ punkt $C=(4,4)$ jest środkiem okręgu, to równanie tego okręgu ma postać

$$(x-4)^2+(y-4)^2=r^2,$$

a więc szukany okrąg ma równanie $(x-4)^2+(y-4)^2=\frac{32}{\pi}$.

Zadanie 71.

Zauważmy, że odcinki *KL* i *KM* są przyprostokątnymi rozważanego trójkąta.



Prosta *KM* jest prostopadła do prostej *KL* i przechodzi przez punkt *K*.

Pole trójkąta *KLM* określone jest wzorem $P=\frac{1}{2}|KL|\cdot|KM|$.

Długość odcinka *KL* jest odległością punktu *L* od prostej *KM* oraz $|KM|$ jest odległością punktu *M* od prostej *KL* o równaniu $2x+3y+5=0$.

Zauważmy, że prosta *KM* jest prostopadła do prostej *KL*: $y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$.

KM ma więc postać $y=\frac{3}{2}x+b$.

Po przekształceniu równania do postaci ogólnej mamy: $3x-2y+2b=0$.

Wyznaczmy teraz współrzędne punktu *L*:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \\ y = -\frac{7}{4}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Tak więc $L = (2, -3)$.

Odległość punktu L od prostej KM jest równa

$$|KL| = \frac{|6+6+2b|}{\sqrt{4+9}} = \left|\frac{12+2b}{\sqrt{13}}\right|.$$

Określmy teraz współrzędne punktu M.

M jest punktem przecięcia prostych: LM: $y = -\frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$ oraz prostej KM: $y = \frac{3}{2}x + b$.

Drugą współrzędną punktu M można wyrazić na dwa sposoby: $y = -\frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$ oraz $y = \frac{3}{2}x + b$. Możemy więc zapisać: $-\frac{7}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x + b$.

Tak więc

$$0 = \left(-\frac{7}{4} - \frac{3}{2}\right)x + \frac{1}{2} - b,$$

$$x = \frac{\frac{1}{2} - b}{\frac{7}{4} + \frac{3}{2}} = \frac{2}{13} - \frac{4}{13}b,$$

$$y = -\frac{7}{4}\left(\frac{2}{13} - \frac{4}{13}b\right) + \frac{1}{2} = \frac{7}{13}b + \frac{3}{13}.$$

Punkt M ma więc współrzędne $\left(\frac{2}{13} - \frac{4}{13}b, \frac{7}{13}b + \frac{3}{13}\right)$.

Wyznaczmy odległość punktu M od prostej KL: $2x + 3y + 5 = 0$.

$$|KM| = \frac{\left|2\cdot\left(\frac{2}{13} - \frac{4}{13}b\right) + 3\cdot\left(\frac{7}{13}b + \frac{3}{13}\right) + 5\right|}{\sqrt{4+9}} = \frac{\left|\frac{4}{13} - \frac{8}{13}b + \frac{21}{13}b + \frac{9}{13} + 5\right|}{\sqrt{13}} = \frac{|b+6|}{\sqrt{13}}.$$

Pole trójkąta KLM dane jest więc wzorem:

$$P = \frac{1}{2}\cdot\frac{|2b+12|}{\sqrt{13}}\cdot\frac{|b+6|}{\sqrt{13}}.$$

Wynika z tego, że

$$\frac{2|b+6|\cdot|b+6|}{13}=26,$$

$$(b+6)^2=169,$$

$$b^2+12b-133=0,$$

$$b_1=\frac{-12-26}{2}=-19,$$

$$b_2=\frac{-12+26}{2}=7.$$

Tak więc prosta *KM* określona jest następującymi równaniami: $y=\frac{3}{2}x+7$ oraz $y=\frac{3}{2}x-19.$

Zadanie 72.

Z warunku prostopadłości prostych wynika, że $a\cdot(2b-1)+b\cdot(-a)=0$. Możemy zapisać równanie $a[(2b-1)-b]=0$, które jest równoważne alternatywie:

$a=0\vee b=1.$

Ale z treści zadania mamy, że $a>0$.

Dla $b=1$ równania prostych przyjmują postać:

k: $ax+y-4a=0$, l: $x-ay-4=0$.

Niech A oraz B będą punktami wspólnymi prostych odpowiednio k i l z osią Oy. Wtedy $A=(0,4a)$, $B=\left(0,-\frac{4}{a}\right)$ oraz $|AB|=\left|4a+\frac{4}{a}\right|$.

Trzeci wierzchołek trójkąta jest punktem wspólnym prostych k i l, zatem jego współrzędne wyznaczymy, rozwiązując układ równań $\begin{cases}ax+y=4a\\ x-ay=4\end{cases}$. Mnożąc drugie z równań przez liczbę $-a$ i dodając równania stronami, otrzymujemy warunek $(a^2+1)y=0$. Ostatnia równość jest spełniona tylko dla $y=0$. Wtedy $x=4$.

Widać więc, że wysokość poprowadzona na bok *AB* ma długość 4.

Prowadzi to do równania $\frac{1}{2}\cdot\left|4a+\frac{4}{a}\right|\cdot 4=20$, które, korzystając z faktu, że a jest liczbą dodatnią, możemy zapisać w postaci równoważnej $2a^2-5a+2=0$. Jego rozwiązaniami są liczby $a=2$ lub $a=\frac{1}{2}$.

Zadanie 73.

I sposób

Prosta jest styczna do okręgu, gdy posiada z nim jeden punkt wspólny.

Aby wyznaczyć punkty wspólne prostej i okręgu, rozwiążemy układ równań.

$$\begin{cases} y = kx + l \\ (x-k)^2 + (y-l)^2 = m^2 \end{cases}$$

Okrąg i prosta mają jeden punkt wspólny, gdy układ równań posiada jedno rozwiązanie:

$$(x-k)^2 + (kx + l - l)^2 = m^2,$$

$$x^2 - 2kx + k^2 + k^2x^2 = m^2,$$

$$x^2(1+k^2) - 2kx + k^2 - m^2 = 0.$$

Równanie kwadratowe z niewiadomą x posiada jedno rozwiązanie, gdy

$$(-2k)^2 - 4(1+k^2)(k^2 - m^2) = 0,$$

$$4k^2 - 4(k^2 - m^2 + k^4 - k^2m^2) = 0,$$

$$4k^2 - 4k^2 + 4m^2 - 4k^4 + 4k^2m^2 = 0,$$

$$m^2 - k^4 + k^2m^2 = 0,$$

$$m^2(1+k^2) = k^4,$$

$$\frac{k^4}{1+k^2} = m^2.$$

Tak więc, jeśli prosta jest styczna do okręgu, to zachodzi równość $\frac{k^4}{1+k^2} = m^2$.

II sposób

Prosta $y = kx + l$ i okrąg $(x-k)^2 + (y-l)^2 = m^2$ są styczne, gdy odległość d między prostą i środkiem okręgu $S = (k, l)$ jest równa długości promienia m.

Wyznaczmy odległość punktu $S = (k, l)$ od prostej o równaniu $kx - y + l = 0$.

$$d = \frac{|k \cdot k + (-1) \cdot l + l|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Prosta i okrąg mają jeden punkt wspólny, gdy $d = m$:

$$\frac{|k \cdot k + (-1) \cdot l + l|}{\sqrt{k^2 + 1}} = m,$$

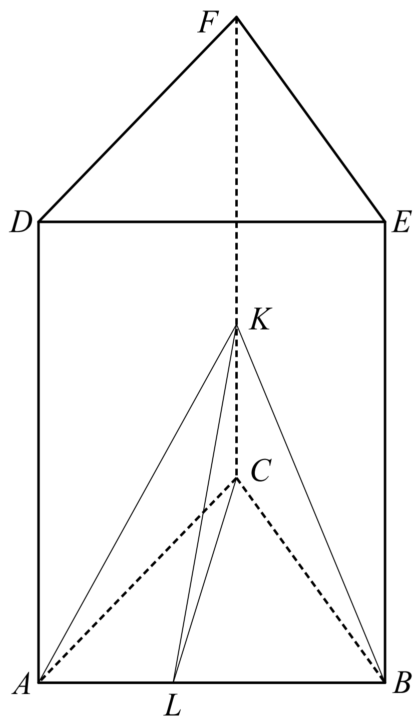
$$\frac{k^2}{\sqrt{k^2 + 1}} = m,$$

$$\frac{k^4}{k^2 + 1} = m^2.$$

Tak więc jeśli prosta jest styczna do okręgu, to zachodzi równość $\frac{k^4}{k^2 + 1} = m^2$.

Zadanie 74.

I sposób



Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku:

L — środek krawędzi AB.

Obliczamy wysokość podstawy graniastosłupa: $|LC| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Przekrój graniastosłupa opisaną płaszczyzną jest trójkątem równoramiennym ABK o polu $15\sqrt{3}$, zatem otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |LK| = 15\sqrt{3}, \quad \text{stąd} \quad |LK| = 5\sqrt{3}.$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta LCK:

$$|CK|^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 48,$$

$$|CK| = 4\sqrt{3}.$$

Rozpatrujemy dwie sytuacje.

Sytuacja pierwsza: odcinek $|CK| = \frac{2}{5}|CF|$.

Zatem $|CF| = \frac{5}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$.

Obliczamy objętość graniastosłupa:

$$V_1 = \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot 10\sqrt{3} = 270.$$

Sytuacja druga: odcinek $|CK| = \frac{3}{5}|CF|$.

Zatem

$$|CF| = \frac{5}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{20}{3}\sqrt{3}.$$

Obliczamy objętość graniastosłupa:

$$V_2 = \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{20}{3}\sqrt{3} = 180.$$

Objętość graniastosłupa jest równa 180 lub 270.

II sposób

Korzystamy z oznaczeń na rysunku w I sposobie.

Niech $x = |AK| = |BK|$.

Przekrój graniastosłupa opisaną płaszczyzną jest trójkątem równoramiennym *ABK*.

Obwód trójkąta *ABK* jest opisany wyrażeniem $2x+6$, a jego pole jest równe $15\sqrt{3}$.

Wykorzystujemy wzór Herona:

$$\sqrt{9(x+3)(x-3)} = 15\sqrt{3}, \quad \text{stąd} \quad x = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta *BCK*:

$$|CK|^2 = \left(2\sqrt{21}\right)^2 - 6^2 = 48,$$

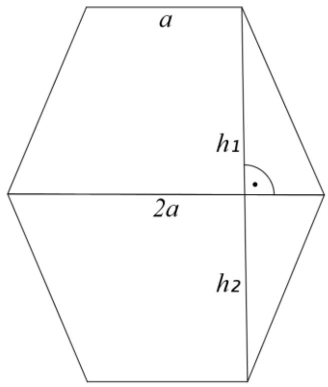
$$|CK| = 4\sqrt{3}.$$

Rozpatrujemy dwie sytuacje.

Dalsza część zadania tak, jak w I sposobie.

Zadanie 75.

Przekrój graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego jest sześciokątem wypukłym, składającym się z dwóch przystających trapezów równoramiennych.



Podstawy trapezów mają długości *a* i *2a*. Oznaczmy wysokość trapezów jako h_1 i h_2. (Trapezy są przystające, więc $h_1 = h_2 = h$).

Pole danego przekroju jest więc równe:

$$P = \frac{1}{2}(4+8)\cdot h_1 + \frac{1}{2}(4+8)\cdot h_2 = 6h_1 + 6h_2 = 12h.$$

Tak więc

$$12h = 48\sqrt{2},$$

$$h = 4\sqrt{2}.$$

Objętość graniastosłupa dana jest wzorem:

$$V = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot b,$$

gdzie *a* jest długością krawędzi podstawy, a *b* jest długością krawędzi bocznej graniastosłupa. Wiemy, że $a = 4$, tak więc

$$V = 6\cdot\frac{16\sqrt{3}}{4}\cdot b = 24\sqrt{3}\cdot b.$$

Wyznaczmy długość *b*.

Zauważmy, że odcinek *b* jest przyprostokątną trójkąta, którego druga przyprostokątna *x*, jest równa $x = 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość $2h = 8\sqrt{2}$.

Tak więc

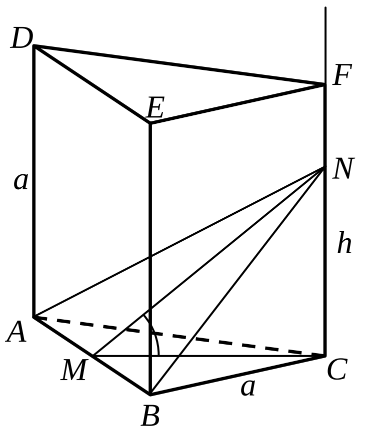
$$b = \sqrt{\left(8\sqrt{2}\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{128-48} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Wyznaczmy teraz objętość graniastosłupa:

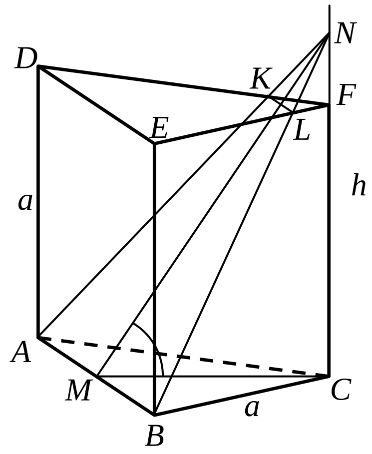
$$V = 24\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{5} = 96\sqrt{15}.$$

Zadanie 76.

Niech N oznacza punkt, w którym płaszczyzna zawierająca krawędź AB przecina prostą CF, M — środek krawędzi AB oraz niech $h=|CN|$. Na to, aby rozpatrywany przekrój naszego graniastosłupa był trapezem, potrzeba i wystarcza, żeby punkt N leżał na zewnątrz odcinka CF tak, żeby F był między C i N. Sytuacja, gdy przekrój będzie trójkątem równoramiennym, pokazana jest na rysunku 1., a sytuacja, gdy przekrój jest trapezem — na rysunku 2.



Rys. 1



Rys. 2

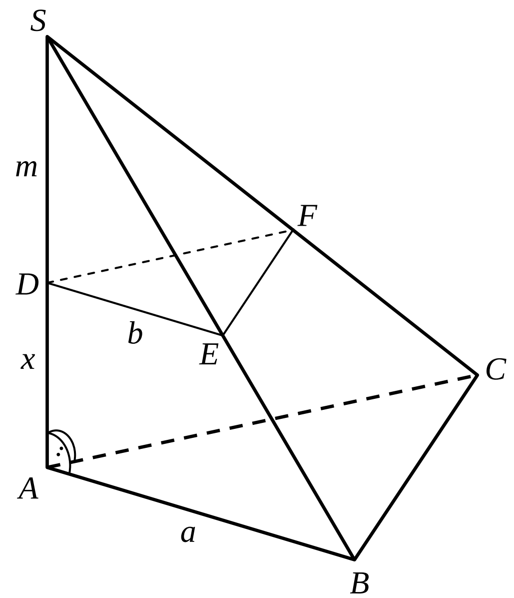
Spełniony musi więc być warunek $h>a$. Odcinek MC to wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a, więc $|MC|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Z trójkąta prostokątnego MCN otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{|MC|}=\frac{h}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{2h}{a\sqrt{3}}>\frac{2a}{a\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Zadanie 77.

I sposób

Ponieważ płaszczyzny ABC i DEF są równoległe, a płaszczyzna ABC jest prostopadła do krawędzi AS, to odległość między tymi płaszczyznami stanowi długość odcinka AD. Oznaczmy ją literą x. Przyjmijmy też oznaczenia jak na rysunku.



Zauważmy, że trójkąty ABC i DEF są jednokładne. Jeden z nich jest obrazem drugiego w jednokładności o środku S, np. trójkąt DEF jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku S i skali $\frac{|SD|}{|SA|}=\frac{m}{m+x}$. Zatem trójkąt DEF jest również podobny do trójkąta ABC w tej samej skali. Stosunek pól trójkątów podobnych jest równy kwadratowi skali ich podobieństwa, więc

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{m}{m+x}\right)^2 .$$

Stąd otrzymujemy

$$x = m\left(\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} - 1\right). \tag{1}$$

Trójkąty *SDE* i *SDF* są przystające i każdy z nich jest „połową” trójkąta równobocznego o wysokości *b* i boku długości $|SE| = 2m$. Zatem

$$|DE| = b = \frac{2m\sqrt{3}}{2} = m\sqrt{3} .$$

Trójkąt *SEF* jest równoboczny, więc $|EF| = |SE| = 2m$. Trójkąt *DEF* jest równoramienny. Wysokość *h* tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka *D* jest równa

$$h = \sqrt{|DE|^2 - \left(\tfrac{1}{2}|EF|\right)^2} = \sqrt{\left(m\sqrt{3}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 2m\right)^2} = \sqrt{3m^2 - m^2} = m\sqrt{2} ,$$

więc jego pole P_2 jest równe

$$P_2 = \frac{1}{2}|EF|\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot m\sqrt{2} = m^2\sqrt{2} ,$$

skąd

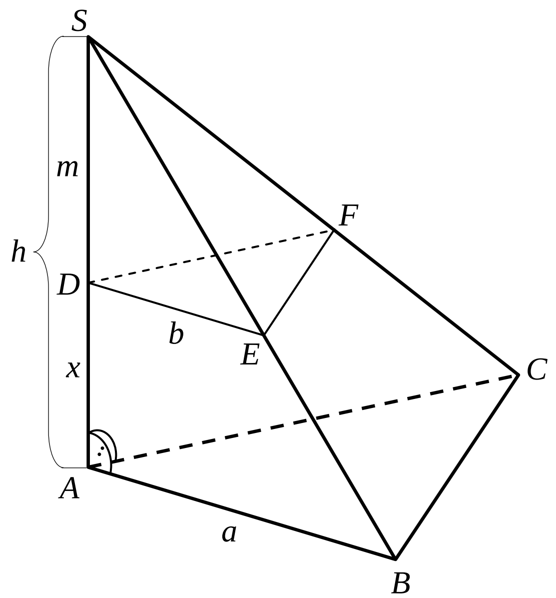
$$m = \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt[4]{2}} .$$

Stąd i z (1) otrzymujemy

$$x = \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{\frac{P_1}{P_2}} - 1\right) = \frac{\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}}{\sqrt[4]{2}} .$$

II sposób

Ponieważ płaszczyzny *ABC* i *DEF* są równoległe, a płaszczyzna *ABC* jest prostopadła do krawędzi *AS*, to odległość między tymi płaszczyznami stanowi długość odcinka *AD*. Oznaczmy ją literą *x*. Przyjmijmy też oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąty *SAB* i *SAC* prostokątne, gdyż krawędź boczna *AS* jest wysokością ostrosłupa opuszczoną na podstawę *ABC*. Krawędź ta jest wspólną przyprostokątną tych trójkątów . Ponadto $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ASC| = 60^\circ$. Zatem trójkąty *SAB* i *SAC* są przystające i każdy z nich jest „połową” trójkąta równobocznego o wysokości *a* i boku długości $|SB| = 2h$. Zatem

$$|AB| = a = \frac{2h\sqrt{3}}{2} = h\sqrt{3}.$$

W trójkącie *SBC* krawędzie *BS* i *CS* mają tę samą długość, co wynika z przystawania trójkątów *SAB* i *SAC*. Ponadto $|\sphericalangle BSC| = 60^\circ$, więc trójkąt *SBC* jest równoboczny. Zatem $|BC| = |SB| = 2h$. Trójkąt *ABC* jest równoramienny. Wysokość *p* tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka *A* jest równa

$$p = \sqrt{|AB|^2 - \left(\tfrac{1}{2}|BC|\right)^2} = \sqrt{\left(h\sqrt{3}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 2h\right)^2} = \sqrt{3h^2 - h^2} = h\sqrt{2},$$

więc jego pole P_1 jest równe

$$P_1 = \frac{1}{2}|BC|\cdot p = \frac{1}{2}\cdot 2h\cdot h\sqrt{2} = h^2\sqrt{2},$$

skąd

$$h = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt[4]{2}}.$$

Analogicznie zauważamy, że trójkąty *SDE* i *SDF* są przystające i każdy z nich jest „połową” trójkąta równobocznego o wysokości *b* i boku długości $|SE| = 2m$. Powtarzając analogiczne obliczenia, otrzymujemy

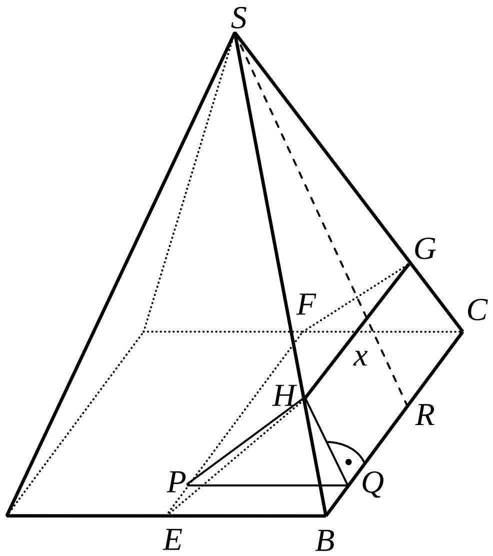
$$m = \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt[4]{2}}.$$

Zatem szukana odległość *x* jest równa

$$x = h - m = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt[4]{2}} - \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}}{\sqrt[4]{2}}.$$

Zadanie 78.

Zauważmy, że zarówno otrzymany przekrój *EFGH*, jak i czworokąt *BCGH* są trapezami o takich samych podstawach i różnych wysokościach. Poprowadźmy z wierzchołka *H* wysokości *HQ* i *HP* odpowiednich trapezów.



Przyjmijmy oznaczenia:

$$|GH| = x, \quad |HP| = p, \quad |HQ| = q.$$

Oczywiście $x \in (0, 1)$.

Wtedy

$$P_{EFGH} = \frac{1+x}{2}\cdot p,$$

$$P_{BCGH} = \frac{1+x}{2} \cdot q\,.$$

Stosunek pól obu trapezów jest więc równy:

$$\frac{P_{EFGH}}{P_{BCGH}} = \frac{\frac{1+x}{2} \cdot p}{\frac{1+x}{2} \cdot q} = \frac{p}{q} = 2\,.$$

Oznaczmy przez h wysokość SR ściany bocznej. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że wtedy $h^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$. Stąd $h = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Trójkąty BHQ i BSR są podobne, zatem w szczególności $\frac{|RS|}{|QH|} = \frac{|BR|}{|BQ|}$, co przy przyjętych oznaczeniach można wyrazić w postaci:

$$\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{q} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x}\,.$$

Zatem $q = \frac{\sqrt{5}(1-x)}{2}$, czyli $x = 1 - \frac{2q}{\sqrt{5}}$.

Kąt PQH jest równy kątowi nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy, bo odcinki HQ i PQ są prostopadłe do prostej BC. Zatem jego cosinus jest równy:

$$\cos(\angle PQH) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Korzystając z twierdzenia cosinusów (dla trójkąta PQH), możemy zapisać, że

$$p^2 = q^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2q \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\angle PQH),$$

czyli

$$p^2 = \frac{5(1-x)^2}{4} + \frac{1}{4} - 2\frac{\sqrt{5}(1-x)}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5x^2 - 8x + 4}{4}\,.$$

Ponieważ $\frac{p}{q} = 2$, to $\frac{p^2}{q^2} = 4$.

Otrzymujemy zatem równanie z niewiadomą x:

$$\frac{\frac{5x^2-8x+4}{4}}{\frac{5x^2-10x+5}{4}}=\frac{5x^2-8x+4}{5x^2-10x+5}=4,$$

czyli

$$5x^2-8x+4=4\left(5x^2-10x+5\right).$$

Po redukcji otrzymujemy równanie kwadratowe $15x^2-32x+16=0$. Ponieważ $\Delta=64$, to

$$x_1=\frac{32-8}{30}=\frac{24}{30}=\frac{4}{5},\qquad x_2=\frac{32+8}{30}=\frac{40}{30}=\frac{4}{3}>1.$$

Zatem

$$P_{EFGH}=\frac{1+\frac{4}{5}}{2}\cdot\sqrt{\frac{5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2-8\cdot\frac{4}{5}+4}{4}}=\frac{9}{10}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{50}.$$

Uwaga

Ostatni etap rozwiązania można przeprowadzić dla zmiennych p, q, a dopiero później obliczyć x. Ponieważ $\frac{p}{q}=2$, to $p=2q$. Stąd, z równania $p^2=q^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2q\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\angle PQH\right)$, otrzymujemy równanie z niewiadomą q:

$$4q^2=q^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2q\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}},$$

które po uporządkowaniu przyjmuje postać:

$$60q^2+4\sqrt{5}q-5=0.$$

Ponieważ $\sqrt{\Delta}=16\sqrt{5}$, to $q_1=\frac{-4\sqrt{5}-16\sqrt{5}}{120}=-\frac{\sqrt{5}}{6}<0$, $q_2=\frac{-4\sqrt{5}+16\sqrt{5}}{120}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

Zatem $p=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ oraz $x=1-\frac{2q}{\sqrt{5}}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. Stąd $P_{EFGH}=\frac{1+\frac{4}{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{9\sqrt{5}}{50}$.

3.5. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Zadanie 80.

I sposób

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trójelementowe podzbiory (kombinacje) zbioru $\{1,2,...,9\}$. Jest to model klasyczny.

Wprowadzamy oznaczenia dla zdarzeń:

A — wśród wylosowanych liczb będzie liczba 4,

B — suma wylosowanych liczb będzie parzysta.

Mamy obliczyć $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{|A\cap B|}{|B|}$.

Zdarzeniu B sprzyjają podzbiory trójelementowe złożone z trzech liczb parzystych albo złożone z jednej liczby parzystej i dwóch nieparzystych:

$$|B|=\binom{4}{3}+\binom{4}{1}\binom{5}{2}=4+4\cdot 10=44.$$

Zdarzeniu $A\cap B$ sprzyjają podzbiory trójelementowe złożone z liczby 4 i dwóch liczb parzystych albo złożone z liczby 4 i dwóch liczb nieparzystych:

$$|A\cap B|=\binom{3}{2}+\binom{5}{2}=3+10=13.$$

Stąd

$$P(A|B)=\frac{13}{44}.$$

Odpowiedź: $P(A|B)=\dfrac{13}{44}$.

Uwaga: Możesz obliczyć $|\Omega|=\binom{9}{3}=84$, następnie $P(B)=\dfrac{11}{21}$ oraz $P(A\cap B)=\dfrac{13}{84}$.

II sposób

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trójwyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru $\{1,2,...,9\}$. Jest to model klasyczny.

Wprowadzamy oznaczenia dla zdarzeń:

A — wśród wylosowanych liczb będzie liczba 4,

B — suma wylosowanych liczb będzie parzysta.

Mamy obliczyć $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{|A\cap B|}{|B|}$.

Zdarzeniu B sprzyjają wariacje bez powtórzeń, których wyrazami są trzy liczby parzyste albo jedna liczba parzysta i dwie nieparzyste,

$$|B|=4\cdot 3\cdot 2+3\cdot 4\cdot 5\cdot 4=264.$$

Zdarzeniu $A\cap B$ sprzyjają trójwyrazowe wariacje bez powtórzeń, w których występuje liczba 4 i dwie liczby parzyste albo liczba 4 i dwie liczby nieparzyste:

$$|A\cap B|=3\cdot 3\cdot 2+3\cdot 5\cdot 4=78.$$

Stąd

$$P(A|B)=\frac{78}{264}=\frac{13}{44}.$$

Odpowiedź: $P(A|B)=\frac{13}{44}$.

Uwaga: Możesz obliczyć $|\Omega|=9\cdot 8\cdot 7=504$, następnie $P(B)=\frac{11}{21}$ oraz $P(A\cap B)=\frac{13}{84}$.

Zadanie 81.

D

Zadanie 82.

C

Zadanie 83.

I sposób

Zacznijmy od wybrania dowolnej cyfry różnej od zera. Możemy to zrobić na 9 sposobów. Umieśćmy wybraną cyfrę (nazwijmy ją *a*) na miejscu setek. Teraz — znów na 9 sposobów — wybieramy drugą cyfrę, różną od *a*; nazwijmy ją *b*.

Jak możemy wypełnić miejsca dziesiątek i jedności? Pierwszy sposób: na obu tych miejscach wpisujemy *b*. Drugi sposób: na miejscu dziesiątek wpisujemy *b*, na miejscu zaś jedności wpisujemy *a*. Trzeci sposób: na miejscu dziesiątek wpisujemy *a*, na miejscu jedności wpisujemy *b*. Tak więc dla każdego z 9 sposobów wyboru cyfry b mamy 3 sposoby utworzenia liczby trzycyfrowej spełniającej warunki zadania.

W ten sposób z zasady mnożenia otrzymujemy odpowiedź: $9\cdot 9\cdot 3=243$.

II sposób

Zgodnie z warunkami zadania interesują nas liczby, w których zapisie dziesiętnym jedna cyfra występuje dokładnie dwa razy, inna — dokładnie raz.

Niech *a* oznacza niezerową cyfrę. Może ona wystąpić dwukrotnie w zapisie liczby trzycyfrowej na 3 sposoby (liczba kombinacji $\binom{3}{2}$):

Setki	Dziesiątki	Jedności
a	*a*	
a		*a*
	a	*a*

Puste pozycje dziesiątek i jedności możemy wypełnić na 9 sposobów, bo tyle jest cyfr różnych od *a*. Z kolei pozycję setek możemy wypełnić tylko na 8 sposobów, gdyż nie możemy tam wpisać cyfry 0. Ponieważ mamy 9 możliwych wartości *a*, łącznie mamy $2\cdot 9\cdot 9+9\cdot 8$, czyli 234 liczby o powtarzającej się cyfrze różnej od 0 (reguła mnożenia, następnie reguła dodawania).

Para 0-0 może wystąpić tylko w jeden sposób, jako że 0 nie może wystąpić na pozycji setek, na której może jej towarzyszyć dowolna cyfra niezerowa; mamy zatem 9 możliwości.

Łącznie mamy więc 234 + 9, czyli 243 liczby spełniające warunki zadania.

Zadanie 84.

I sposób

W zbiorze A jest n liczb parzystych i n liczb nieparzystych.

Suma czterech liczb naturalnych jest liczbą parzystą, gdy

— jest sumą czterech liczb parzystych

albo

— jest sumą czterech liczb nieparzystych,

albo

— jest sumą dwóch liczb parzystych i dwóch liczb nieparzystych.

Suma czterech liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą, gdy

— jest sumą jednej liczby parzystej i trzech nieparzystych

albo

— jest sumą jednej liczby nieparzystej i trzech parzystych.

Stąd

$$x=\binom{n}{4}+\binom{n}{2}\binom{n}{2}+\binom{n}{4}=2\binom{n}{4}+\binom{n}{2}\binom{n}{2},$$

$$y=\binom{n}{1}\binom{n}{3}+\binom{n}{3}\binom{n}{1}=2\binom{n}{1}\binom{n}{3}.$$

$$\begin{aligned}
x-y&=2\binom{n}{4}+\binom{n}{2}\binom{n}{2}-2\binom{n}{1}\binom{n}{3}=\\
&=2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)n(n-1)}{2\cdot 2}-2\cdot\frac{n\cdot n(n-1)(n-2)}{6}=\\
&=n(n-1)\left[\frac{(n-2)(n-3)}{12}+\frac{n(n-1)}{4}-\frac{n(n-2)}{3}\right]=\\
&=n(n-1)\left[\frac{n^2-5n+6+3n^2-3n-4n^2+8n}{12}\right]=\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}.
\end{aligned}$$

II sposób

W zbiorze A jest n liczb parzystych i n liczb nieparzystych.

Suma czterech liczb naturalnych jest liczbą parzystą, gdy

— jest sumą czterech liczb parzystych

albo

— jest sumą czterech liczb nieparzystych,

albo

— jest sumą dwóch liczb parzystych i dwóch liczb nieparzystych.

$$x = 2\binom{n}{4} + \binom{n}{2}\binom{n}{2}.$$

Liczba wszystkich czteroelementowych podzbiorów zbioru $2n$-elementowego jest równa $\binom{2n}{4}$.

Stąd

$$y = \binom{2n}{4} - x.$$

$$x - y = 4\binom{n}{4} + 2\binom{n}{2}\binom{n}{2} - \binom{2n}{4} =$$

$$= 4 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + 2 \cdot \frac{n(n-1)n(n-1)}{2 \cdot 2} - \frac{2n \cdot (2n-1)(2n-2)(2n-3)}{24} =$$

$$= n(n-1)\left[\frac{(n-2)(n-3)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(2n-1)(2n-3)}{6}\right] =$$

$$= n(n-1)\left[\frac{n^2 - 5n + 6 + 3n^2 - 3n - 4n^2 + 8n - 3}{6}\right] = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}.$$

III sposób

W zbiorze A jest n liczb parzystych i n liczb nieparzystych.

Suma czterech liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą, gdy

— jest sumą jednej liczby parzystej i trzech liczb nieparzystych

albo

— jest sumą jednej liczby nieparzystej i trzech liczb parzystych.

Stąd

$$y = 2\binom{n}{1}\binom{n}{3}.$$

Liczba wszystkich czteroelementowych podzbiorów zbioru $2n$ elementowego jest równa $\binom{2n}{4}$.

Stąd

$$x = \binom{2n}{4} - y.$$

$$x-y=\binom{2n}{4}-4\binom{n}{1}\binom{n}{3}=$$
$$=\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{24}-4\cdot\frac{n\cdot n(n-1)(n-2)}{6}=$$
$$=n(n-1)\left[\frac{(2n-1)(2n-3)}{6}-\frac{4n(n-2)}{6}\right]=$$
$$=n(n-1)\left[\frac{4n^2-8n+3-4n^2+8n}{6}\right]=\frac{n(n-1)}{2}=\binom{n}{2}.$$

Zadanie 85.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch dziewcząt, zaś B — zdarzenie polegające na wylosowaniu dwóch osób z tej samej klasy. Mamy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B. Użyjemy wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia B.

Dwie osoby z klasy IIIA można wybrać na $\binom{20}{2}$ sposobów, tyle samo jest sposobów wybrania dwóch osób z klasy IIIB. Ponieważ wszystkich możliwych wyborów 2 osób spośród 40 uczniów jest $\binom{40}{2}$, to

$$P(B)=\frac{\binom{20}{2}+\binom{20}{2}}{\binom{40}{2}}=\frac{190+190}{780}=\frac{38}{78}.$$

Obliczamy teraz prawdopodobieństwo zdarzenia $A\cap B$, czyli wylosowania dwóch dziewcząt pochodzących z tej samej klasy.

Dwie dziewczęta z klasy IIIA można wybrać na $\binom{6}{2}$ sposobów, dwie dziewczęta z klasy IIIB na $\binom{12}{2}$ sposobów, zatem

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{6}{2}+\binom{12}{2}}{\binom{40}{2}}=\frac{81}{780}.$$

Możemy teraz obliczyć żądane prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{81}{780}}{\frac{38}{78}}=\frac{81}{380}.$$

Zadanie 86.

Niech $\Omega=\{(x,y): x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$, zatem $|\Omega|=36$.

Niech A będzie zdarzeniem: suma kwadratów wyrzuconych liczb przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1. Niech B będzie zdarzeniem: wartość bezwzględna różnicy wyrzuconych liczb będzie większa od 2.

Skorzystamy z prawdopodobieństwa warunkowego:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}.$$

Ponieważ suma kwadratów wyrzuconych liczb przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1, wyrzucono jedną liczbę parzystą i jedną nieparzystą. Zatem $|A|=18$.

Zdarzenie $B\cap A$ oznacza, że jedna liczba jest parzysta, druga nieparzysta i wartość bezwzględna różnicy wyrzuconych liczb jest większa od 2.

Wobec tego mamy następujące pary: $(1,4),(1,6),(2,5),(3,6),(4,1),(5,2),(6,1),(6,3)$, czyli $|B\cap A|=8$.

Zatem

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\overline{\overline{B\cup A}}}{\overline{\overline{A}}}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}.$$

Zadanie 87.

$$P(A'\cap B)=P(B\setminus A)=P(B\setminus(A\cap B))=P(B)-P(A\cap B).$$

Stąd

$$\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=1-P(A|B)=1-0,386=0,614.$$

Należy zakodować cyfry: 6, 1, 4.

Zadanie 88.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Zdarzenia $A'\cap B, A\cap B, A\cap B'$ są parami rozłączne oraz

$$A\cup B=(A'\cap B)\cup(A\cap B)\cup(A\cap B')\text{ i } B=(A'\cap B)\cup(A\cap B).$$

Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń rozłącznych jest równe sumie prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń. Zatem

$$P(A \cup B) = P(A' \cap B) + P(A \cap B) + P(A \cap B').$$

Stąd obliczamy $P(A \cap B)$; $P(A \cap B) = 0,3$.

Obliczamy P(B):

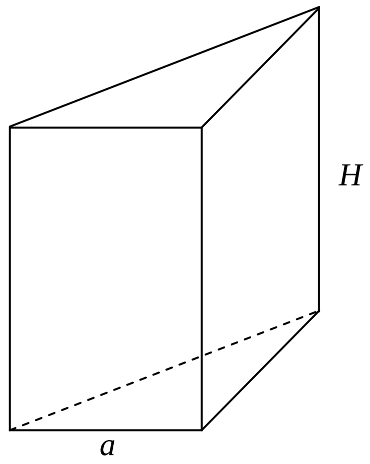
$$P(B) = P(A' \cap B) + P(A \cap B),$$

zatem $P(B) = 0,7$. Stąd

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}.$$

3.6. Rachunek różniczkowy

Zadanie 90.



Wprowadzamy oznaczenia: a — krawędź podstawy graniastosłupa, H — wysokość graniastosłupa.

Z warunków zadania mamy: $6a + 3H = 12$, stąd $H = 4 - 2a$.

Zapisujemy wzór na objętość graniastosłupa:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(4 - 2a\right),$$

$$V = -\frac{\sqrt{3}}{2}a^3 + \sqrt{3}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-a^3 + 2a^2\right)$$

dla $0 < a < 2$.

Rozważamy funkcję $f(a) = -a^3 + 2a^2$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej a.

Obliczamy pochodną tej funkcji: $f'(a) = -3a^2 + 4a$.

Znajdujemy miejsca zerowe pochodnej: $-a\left(3a - 4\right) = 0$, stąd $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{4}{3}$.

Ponadto:

- $f'(a) > 0$ dla a należącego do przedziału $\left(0, \frac{4}{3}\right)$,
- $f'(a) < 0$ w każdym z przedziałów $(-\infty, 0)$ oraz $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left\langle 0, \frac{4}{3}\right\rangle$ i malejąca w każdym z przedziałów $(-\infty, 0\rangle$ oraz $\left\langle \frac{4}{3}, +\infty\right)$.

Ponieważ $V(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot f(a)$ dla $0 < a < 2$, to w przedziale $(0,2)$ funkcja $V(a)$ ma ekstremum w tym samym punkcie, w którym ma je funkcja $f(a)$. Stąd oraz z monotoniczności (współczynnik $\frac{\sqrt{3}}{2}$ jest liczbą dodatnią) wynika, że w punkcie $a = \frac{4}{3}$ funkcja V przyjmuje największą wartość.

Szukane długości boków graniastosłupa są więc równe: $a = \frac{4}{3}$, $H = 4 - 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

Objętość graniastosłupa jest równa $V = \frac{16\sqrt{3}}{27}$.

Zadanie 91.

A

Zadanie 92.

C

Zadanie 93.

Jest to wyrażenie nieoznaczone typu $\frac{0}{0}$. Liczba 2 jest pierwiastkiem licznika i mianownika.

Zapisujemy licznik i mianownik w postaci iloczynowej:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2),$$

$$x^2 + 4x - 12 = (x-2)(x+6).$$

Obliczamy granicę:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x - 12} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+6)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Zadanie 94.

Zauważmy, że

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2a^2x^2+b^2x^2}{a^2x^2-b^2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2a^2+b^2\right)}{x^2\left(a^2-b^2\right)}=\frac{2a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

Oczywiście $a\neq b$.

Zatem $\frac{2a^2+b^2}{a^2-b^2}=2$, czyli $2a^2+b^2=2a^2-2b^2$.

Stąd $3b^2=0$, zatem $b=0$.

Zadanie 95.

B

Zadanie 96.

A

Zadanie 97.

Wprowadzamy oznaczenia: a — krawędź podstawy, x — krótsza przekątna podstawy, h — wysokość ostrosłupa.

Z warunków zadania otrzymujemy $x+h=9$, stąd $h=9-x$.

Zauważmy, że $0<x<9$.

Ponieważ $x=a\sqrt{3}$, zatem $h=9-a\sqrt{3}$, gdzie $0<a<3\sqrt{3}$.

Objętość tego ostrosłupa wyraża się wzorem

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{6a^2\sqrt{3}}{4}h=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}h.$$

Objętość ostrosłupa przedstawiamy jako funkcję:

$$V(a)=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\left(9-a\sqrt{3}\right)=\frac{9}{2}\sqrt{3}a^2-\frac{3}{2}a^3.$$

Określamy dziedzinę funkcji: $D_V=(0,3\sqrt{3})$.

Rozważmy funkcję $f(a)=\frac{9}{2}\sqrt{3}a^2-\frac{3}{2}a^3$, dla $a\in R$.

Wyznaczamy pierwszą pochodną:

$$f'(a)=9\sqrt{3}a-\frac{9}{2}a^2=\frac{9}{2}a(2\sqrt{3}-a),$$

$f'(a)=0$ dla $a=0$ lub $a=2\sqrt{3}$.

Analizujemy znak pierwszej pochodnej:

$f'(a)<0$ dla $a\in(-\infty,0)\cup\left(2\sqrt{3},\infty\right)$ i $f'(a)>0$ dla $a\in\left(0,2\sqrt{3}\right)$.

Uwzględniając założenie $0 < a < 3\sqrt{3}$ dla funkcji V opisującej objętość ostrosłupa, otrzymujemy, że dla $a = 2\sqrt{3}$ spełniony jest warunek konieczny i dostateczny istnienia ekstremum.

a	$\left(0;2\sqrt{3}\right)$	$2\sqrt{3}$	$\left(2\sqrt{3};3\sqrt{3}\right)$
V'	+	0	–
V	$\nearrow$	max	$\searrow$

Z monotoniczności funkcji, która została zobrazowana w tabeli powyżej, wynika, że wartość funkcji V dla argumentu $a = 2\sqrt{3}$ jest wartością największą tej funkcji.

Dla $a = 2\sqrt{3}$ otrzymujemy

$$V\left(2\sqrt{3}\right) = \frac{9}{2}\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(2\sqrt{3}\right)^3 = 18\sqrt{3}.$$

Zatem objętość tego ostrosłupa osiąga największą wartość równą $18\sqrt{3}$, gdy krawędź podstawy jest równa $a = 2\sqrt{3}$.

Zadanie 98.

Definiujemy funkcję $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5$ określoną dla $x \in R$. Jest to wielomian, który jest funkcją różniczkowalną, więc ciągłą. A co za tym idzie, ciągłą w przedziale $\langle 2,3 \rangle$.

$$f(2) = -1 < 0,$$

$$f(3) = 22 > 0.$$

Z ciągłości funkcji f wynika, że ma ona w przedziale $(2,3)$ co najmniej jedno miejsce zerowe. Oznacza to, że równanie $2x^3 - 3x^2 - 5 = 0$ ma w przedziale $(2,3)$ co najmniej jedno rozwiązanie. Obliczamy pochodną funkcji f:

$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ lub $x = 1$, $f'(x) > 0$ w każdym z przedziałów $(-\infty, 0), (1, +\infty)$.

Stąd wynika, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(1, +\infty)$. W szczególności funkcja f jest rosnąca w przedziale $(2,3)$, czyli równanie $2x^3 - 3x^2 - 5 = 0$ ma w tym przedziale dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 99.

Skorzystamy z własności pochodnej wielomianu: jeśli w danym przedziale otwartym pochodna jest dodatnia, to funkcja jest w przedziale domkniętym rosnąca.

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = 12x^3 - 12kx^2 + 12x - 12k.$$

Rozwiązujemy nierówność

$$12x^3 - 12kx^2 + 12x - 12k > 0\,.$$

Równoważnie,

$$12(x^2+1)(x-k) > 0\,.$$

Nierówność jest zatem spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $x > k$, zatem funkcja *f* jest rosnąca w przedziale $\langle k, +\infty)$ i nie jest rosnąca w żadnym przedziale postaci $\langle a, +\infty)$ dla $a < k$.

Stąd odpowiedź: $k = 2$.

Zadanie 100.

Wobec faktu, że funkcja wymierna ma pochodną w każdym punkcie swojej dziedziny (którą tu jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych), wartości najmniejszej lub największej w przedziale należy szukać w punktach z tego przedziału, w których pochodna jest równa 0, lub na krańcach przedziału.

Obliczamy pochodną funkcji *f*:

$$f'(x) = \frac{(x+1)'\cdot(x^2+2x+2) - (x+1)\cdot(x^2+2x+2)'}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1\cdot(x^2+2x+2) - (x+1)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} =$$

$$= -\frac{x^2+2x}{(x^2+2x+2)^2}\,.$$

Tak więc $f'(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 + 2x = 0$. To ostatnie równanie ma dwa rozwiązania: 0 oraz -2 i oba należą do przedziału $\langle -3, 1\rangle$. Największą lub najmniejszą wartość funkcja *f* może zatem przyjąć tylko w punktach: –3, -2, 0 lub 1.

Możemy teraz podstawić te argumenty do wzoru funkcji i porównać otrzymane wyniki:

$$f(-3) = -\frac{2}{5}\,,$$

$$f(-2) = -\frac{1}{2}\,,$$

$$f(0) = \frac{1}{2}\,,$$

$$f(1) = \frac{2}{5}\,.$$

Stwierdzamy przez porównanie, że najmniejszą wartością funkcji *f* w przedziale $\langle -3, 1\rangle$ jest $-\frac{1}{2}$, największą zaś $\frac{1}{2}$.

4. Wykaz umiejętności ogólnych i szczegółowych sprawdzanych zadaniami

4.1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne. Równania i nierówności

Zadanie 1.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 3.1) Uczeń stosuje wzory Viète'a. PR 3.2) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zadanie 2.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 3.4) Uczeń stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$.

Zadanie 3.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 2.1) Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia na $(a\pm b)^3$ oraz $a^3\pm b^3$.

Zadanie 4.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 3.6) Uczeń rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych. PP 5.2) Uczeń bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny.

Zadanie 5.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 1.2) Uczeń stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zadanie 6.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 1.2) Uczeń stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zmianę podstawy logarytmu.

Zadanie 7.

Wymaganie ogólne	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
Wymagania szczegółowe	PR 1.2) Uczeń stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zadanie 8.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 2.3) Uczeń rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias.

Zadanie 9.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 2.3) Uczeń rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias.

Zadanie 10.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 3.2) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zadanie 11.

Wymagania ogólne	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
Wymagania szczegółowe	PR 3.9) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: $\|\|x+1\|-2\|=3$, $\|x+3\|+\|x-5\|>12$.

Zadanie 12.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 3.9) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: $\|\|x+1\|-2\|=3$, $\|x+3\|+\|x-5\|>12$.

Zadanie 13.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 3.9) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: $\|\|x+1\|-2\|>3$, $\|x+3\|+\|x-5\|>12$.

Zadanie 14.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 3.9) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: $\|\|x+1\|-2\|=3$, $\|x+3\|+\|x-5\|>12$.

Zadanie 15.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 3.9) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym, niż: $\left\|\|x+1\|-2\right\|>3$, $\|x+3\|+\|x-5\|>12$. PP 2.1) Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia na $(a\pm b)^2$, a^2-b^2.

Zadanie 16.

Wymagania ogólne	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
Wymagania szczegółowe	PR 3.1) Uczeń stosuje wzory Viète'a.

Zadanie 17.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 3.1) Uczeń stosuje wzory Viète'a.

Zadanie 18.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 3.2) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zadanie 19.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 3.1) Uczeń stosuje wzory Viète'a. PR 3.2) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zadanie 20.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 3.1) Uczeń stosuje wzory Viète'a.

Zadanie 21.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 3.2) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zadanie 22.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 3.4) Uczeń stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$.

Zadanie 23.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 3.4) Uczeń stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$.

Zadanie 24.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 3.4) Uczeń stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$. PR 2.3) Uczeń rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias.

Zadanie 25.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 3.6) Uczeń rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych. PR 2.1) Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia na $(a\pm b)^3$, $a^3\pm b^3$. PP 3.4) Uczeń rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zadanie 26.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 3.6) Uczeń rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych.

Zadanie 27.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 2.3) Uczeń rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias. PP 4.3) Uczeń odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak; punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą). PR 3.7) Uczeń rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe.

Zadanie 28.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 2.2) Uczeń dzieli wielomian przez dwumian $ax+b$. PR 2.3) Uczeń rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias. PP 4.4) Uczeń na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x+a)$, $y = f(x)+a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$.

Zadanie 29.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 3.6) Uczeń rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych. PR 2.1) Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$.

Zadanie 30.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 2.2) Uczeń dzieli wielomian przez dwumian $ax+b$. PP 4.10) Uczeń interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).

4.2. Funkcje

Zadanie 31.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PP 4.10) Uczeń interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje). PR 3.2) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem. PP 2.1) Uczeń używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$. PP 3.8) Uczeń rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2$, $\frac{x+1}{x} = 2x$.

Zadanie 32.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 4.1) Uczeń na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicu-

	je wykresy funkcji $y = \lvert f(x) \rvert$, $y = cf(x)$, $y = f(cx)$. PR 6.4) Uczeń posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. gdy rozwiązuje nierówności typu $\sin x > a$, $\cos x \le a$, $tgx > a$).

Zadanie 33.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 6.3) Uczeń wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych. PR 6.6) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin^2 x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.

Zadanie 34.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 6.6) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin^2 x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.

Zadanie 35.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 4.1) Uczeń na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = \lvert f(x) \rvert$, $y = c \cdot f(x)$, $y = f(cx)$.

Zadanie 36.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PP 6.4) Uczeń stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ oraz $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$. PR 2.6) Uczeń dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne.

Zadanie 37.

Wymagania ogólne	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
Wymagania szczegółowe	PR 4.1) Uczeń na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = \lvert f(x) \rvert$, $y = c \cdot f(x)$, $y = f(cx)$. PR 6.4) Uczeń posługuje się wykresami funkcji trygonome-

	trycznych (np. gdy rozwiązuje nierówności typu $\sin x > a$, $\cos x \le a$, $\mathrm{tg} x > a$).

Zadanie 38.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 6.3) Uczeń wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych.

Zadanie 39.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 4.1) Uczeń na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = \lvert f(x) \rvert$, $y = c \cdot f(x)$, $y = f(cx)$. PR 6.3) Uczeń wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych. PR 6.5) Uczeń stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów.

Zadanie 40.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 6.6) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin^2 x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$. PR 6.5) Uczeń stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumy i różnicy sinusów i cosinusów kątów.

Zadanie 41.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 6.6) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin^2 x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$. PP 3.7) Uczeń korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań. typu $x(x+1)(x-7) = 0$.

Zadanie 42.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 6.6) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin^2 x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$,

	$\cos 2x < \frac{1}{2}$. PP 3.5) Uczeń rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zadanie 43.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 6.6) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin^2 x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.

4.3. Ciągi

Zadanie 44.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 5.3) Uczeń rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy. PP 3.8) Uczeń rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2$, $\frac{x+1}{x} = 2x$.

Zadanie 45.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 5.3) Uczeń rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

Zadanie 46.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 5.2) Uczeń oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.

Zadanie 47.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 5.2) Uczeń oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.

Zadanie 48.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 5.2) Uczeń oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.

Zadanie 49.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 5.3) Uczeń rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy. PP 3.4) Uczeń rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zadanie 50.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 5.3) Uczeń rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.

4.4. Geometria

Zadanie 51.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 7.5) Uczeń znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i cosinusów.

Zadanie 52.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 8.4) Uczeń oblicza odległość punktu od prostej. PR 8.5) Uczeń posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności.

Zadanie 53.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 7.4) Uczeń rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.

Zadanie 54.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 7.4) Uczeń rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności G 10.9) Uczeń oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Zadanie 55.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 7.1) Uczeń stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu. PR 6.2) Uczeń wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego).

Zadanie 56.

Wymaganie ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 7.5) Uczeń znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zadanie 57.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 7.1) Uczeń stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.

Zadanie 58.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 7.5) Uczeń znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zadanie 59.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 7.4) Uczeń rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekście praktycznym) ich własności.

Zadanie 60.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 7.1) Uczeń stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.

Zadanie 61.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 7.4. Uczeń rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.

Zadanie 62.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 7.5) Uczeń znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zadanie 63.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 7.1. Uczeń stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.

Zadanie 64.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 8.3) Uczeń wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt.

Zadanie 65.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 8.5) Uczeń posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności. PR .1) Uczeń interpretuje graficznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi oraz układy takich nierówności. 8.6) Uczeń wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu.

Zadanie 66.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 8.6) Uczeń wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu. PP 8.5) Uczeń wyznacza współrzędne środka odcinka. PP 3.4) Uczeń rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zadanie 67.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 8.6) Uczeń wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu. PR 8.4) Uczeń oblicza odległość punktu od prostej. PP 3.4) Uczeń rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zadanie 68.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 8.5) Uczeń posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności. PP 7.2) Uczeń korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych.

Zadanie 69.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 8.5) Uczeń posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności.

Zadanie 70.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 8.5) Uczeń posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności.

Zadanie 71.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 8.3) Uczeń wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt. PR 3.2) Uczeń rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem. PR 8.4) Uczeń oblicza odległość punktu od prostej. PP 8.4) Uczeń oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych.

Zadanie 72.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 8.2) Uczeń bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych. PP 3.4) Uczeń) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.

Zadanie 73.

Wymaganie ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 8.6) Uczeń wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu. PR 3.3) Uczeń rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych.

Zadanie 74.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 9.2) Uczeń określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną. PP 9.6) Uczeń stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.

Zadanie 75.

Wymaganie ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 9.2) Uczeń określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną. G 11.2) Uczeń oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Zadanie 76.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 9.2) Uczeń określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.

Zadanie 77.

Wymagania ogólne	IV. Użycie tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 7.4) Uczeń rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności.

Zadanie 78.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 9.2) Uczeń określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną. PR 7.5) Uczeń znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i cosinusów. PP 3.4) Uczeń rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą. PP 3.8) Uczeń rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$. PP 7.3) Uczeń rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów. G 10.7) Uczeń stosuje twierdzenie Pitagorasa. G 10.9) Uczeń oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

4.5. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka

Zadanie 79.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 10.2) Uczeń oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Zadanie 80.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 10.2) Uczeń oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Zadanie 81.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 10.1) Uczeń wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji, wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych. PP 10.3) Uczeń oblicza prawdopodobieństwo w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Zadanie 82.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 10.1) Uczeń wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Zadanie 83.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 10.1) Uczeń wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Zadanie 84.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 10.1) Uczeń wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Zadanie 85.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 10.2) Uczeń oblicza prawdopodobieństwo warunkowe. PR 10.1) Uczeń wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Zadanie 86.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 10.2) Uczeń oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Zadanie 87.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 10.2) Uczeń oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

Zadanie 88.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 10.2) Uczeń oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.

4.6. Rachunek różniczkowy

Zadanie 89.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 11.4) Uczeń korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji.

Zadanie 90.

Wymagania ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR11.6) Uczeń stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zadanie 91.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 11.4) Uczeń korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji.

Zadanie 92.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 11.1) Uczeń oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych.

Zadanie 93.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 11.1) Uczeń oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych.

Zadanie 94.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 11.1) Uczeń oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych.

Zadanie 95.

Wymagania ogólne	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymagania szczegółowe	PR 11.4) Uczeń korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji.

Zadanie 96.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 11.5) Uczeń znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych.

Zadanie 97.

Wymaganie ogólne	III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe	PR 11.6) Uczeń stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zadanie 98.

Wymagania ogólne	V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymagania szczegółowe	PR 11.4) Uczeń korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji.

Zadanie 99.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 11.4) Uczeń korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji. PR 3.7) Uczeń rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe.

Zadanie 100.

Wymagania ogólne	IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe	PR 11.6) Uczeń stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych. PP 3.4) Uczeń rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.